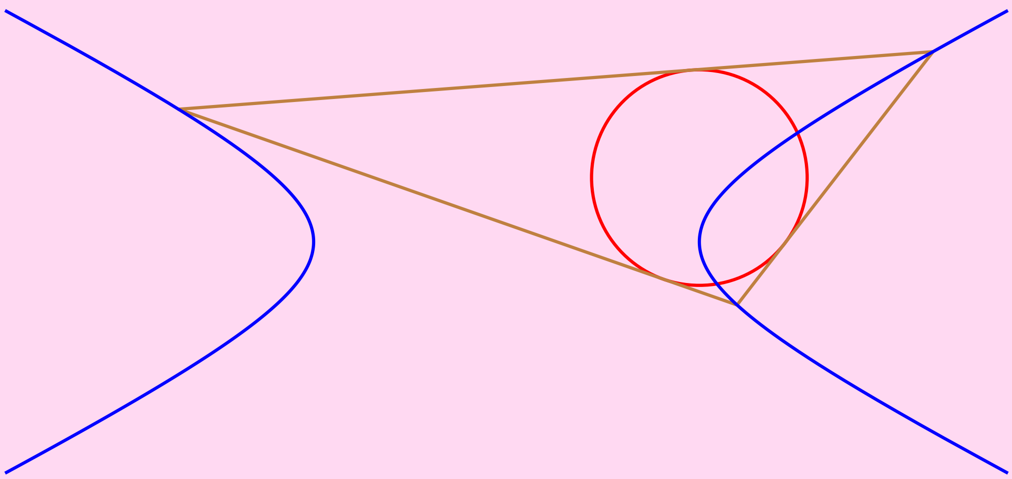
数学空间——人教数学网刊

中学数学

2014 年第 3 期　　总第 17 期



目录

助力高考

1.1 对 2014 年的几道高考数学题的解答——郭子伟

2014 年高考数学的那一天，我又照例在人教论坛发贴，在试题刚出现在网上时随即挑选有玩头的题目来玩，争取第一时间解出来并发布在论坛。贴的地址是：

`http://bbs.pep.com.cn/thread-3100151-1-1.html`；

`http://kuing.orzweb.net/viewthread.php?tid=2803`（副贴）。

目前暂时收录了 21 道题目，现从中再挑选部分整理于此，更多的题解及相关讨论请见原贴。

题目 1 (湖北理数 9)**.** 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点，P 是它们的一个公共点，且 $\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$，则椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值为 （　）

A. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. 3　　D. 2

解　设椭圆和双曲线方程分别为 $\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1$, $\dfrac{x^2}{a_2^2}-\dfrac{y^2}{b_2^2}=1$，它们的离心率分别为 e_1, e_2，设 $PF_1=m$, $PF_2=n$，则依题意，由余弦定理有

$$(2c)^2=m^2+n^2-mn=\frac{(m+n)^2}{4}+\frac{3(m-n)^2}{4}=a_1^2+3a_2^2 \implies \frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=4,$$

由柯西不等式，即得

$$\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)^2\leqslant\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}\right)=\frac{16}{3}\implies\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\leqslant\frac{4}{\sqrt{3}},$$

取等略，选 A。 □

解答时间　2014-6-7 18:03:26

评注　将角度一般化的结果就是 $\dfrac{1}{e_1}+\dfrac{1}{e_2}\leqslant\dfrac{2}{\sin\angle F_1PF_2}$，证法相同，不再详写。

题目 2 (江西理数 9)**.** 在平面直角坐标系中，A, B 分别是 x 轴和 y 轴上的动点，若以 AB 为直径的圆 C 与直线 $2x+y-4=0$ 相切，则圆 C 面积的最小值为 （　）

A. $\dfrac{4}{5}\pi$　　B. $\dfrac{3}{4}\pi$　　C. $\left(6-2\sqrt{5}\right)\pi$　　D. $\dfrac{5}{4}\pi$

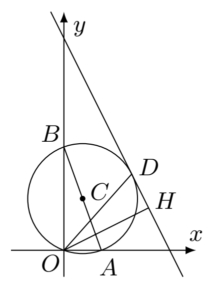


图 1

解　如图 1，OH 为高，显然有 $AB\geqslant OD\geqslant OH$，当且仅当 D 与 H 重合时取等，下略。 □

解答时间 2014-6-7 19:29:25

评注 这道题本来其实是初中题。如果从高中角度来看，也可以考虑圆心 C 的轨迹，因为圆 C 恒过原点，又与定直线相切，所以圆心 C 的轨迹为抛物线，于是也显然易得当 OC 与直线垂直时圆最小。

题目 3 (全国卷 I 理数 8). 设 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，且 $\tan\alpha = \frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，则 （ ）

A. $3\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ B. $3\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ C. $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ D. $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

解 由半角公式 $\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$ 得

$$\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1+\sin x}{\cos x},$$

所以

$$\tan\alpha = \frac{1+\sin\beta}{\cos\beta} = \tan\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$$

又 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$，所以有 $\alpha = \frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}$，即 $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$。 □

解答时间 2014-6-7 20:42:11

评注 感觉我可能做得复杂了，如果大家有更简单的方法（特殊值法、排除法除外）希望贴到原贴中。

题目 4 (全国卷 I 理数 16). 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边，$a = 2$，且 $(2+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C$，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为________。

解 由条件有

$$\begin{aligned}
(2+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C &\iff (a+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C \\
&\iff \sin^2 A - \sin^2 B = (\sin C - \sin B)\sin C \\
&\iff \sin(A-B)\sin(A+B) = (\sin C - \sin B)\sin C \\
&\iff \sin(A-B) - \sin(A+B) + \sin B = 0 \\
&\iff -2\cos A\sin B + \sin B = 0 \\
&\iff \cos A = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

下略。 □

解答时间 2014-6-7 21:01:11

题目 5 (四川理数 14). 设 $m \in \mathbb{R}$，过定点 A 的动直线 $x + my = 0$ 和过定点 B 的动直线 $mx - y - m = 3$ 交于点 $P(x, y)$，则 $|PA| \cdot |PB|$ 的最大值是________。

解 首先显然两定点为 $A(0,0)$, $B(1,3)$，注意到两直线的斜率，前者为 $-\frac{1}{m}$，后者为 m，所以两直线垂直，可见 P 必在以 AB 为直径的圆上，由此易见当 P 为 $\overset{\frown}{AB}$ 中点时 $PA \cdot PB$ 取最大值，为 $\frac{AB^2}{2}$，取等条件略。 □

解答时间 2014-6-7 22:19:59

评注 本题其实并不难，但胜在命制得好，短短的题目将几个知识点有机地结合在一起考查，题目读起来也自然，很巧妙，而不像有的题目那样生硬地将几道完全不相干的题来堆砌成一道题。

题目 6 (四川理数 20)．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的焦距为 4，其短轴的两个端点与长轴的一个端点构成正三角形。

（I）求椭圆 C 的标准方程；

（II）设 F 为椭圆 C 的左焦点，T 为直线 $x=-3$ 上任意一点，过 F 作 TF 的垂线交椭圆 C 于点 P,Q。

（i）证明：OT 平分线段 PQ（其中 O 为坐标原点）；

（ii）当 $\dfrac{|TF|}{|PQ|}$ 最小时，求点 T 的坐标。

这里我只证明第（II）问的第（i）小问，当然，我们应当先给出第（I）问的答案，为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$，过程略。

证明　由（I）的结果易知 $x=-3$ 正是椭圆的左准线，根据 2012 年安徽卷理数第 20 题的结论（见文 [1]），可知 TP,TQ 均为椭圆的切线。

设 PQ 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则由中点弦方程的结论知直线 PQ 的方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}$。

设 $T\left(-\dfrac{a^2}{c},t\right)$，则由切点弦方程的结论知直线 PQ 的方程也可以表示为 $\dfrac{-\dfrac{a^2}{c}x}{a^2}+\dfrac{ty}{b^2}=1$。

对比系数，可见

$$\frac{x_0}{-\dfrac{a^2}{c}}=\frac{y_0}{t}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\implies\frac{y_0}{x_0}=\frac{t}{-\dfrac{a^2}{c}},$$

即 O, M, T 三点共线，所以 OT 平分线段 PQ。 □

解答时间　2014-6-8 08:24:30

评注　如果你接受“拉伸变换”，则还可以有如下更简单的几何证法。

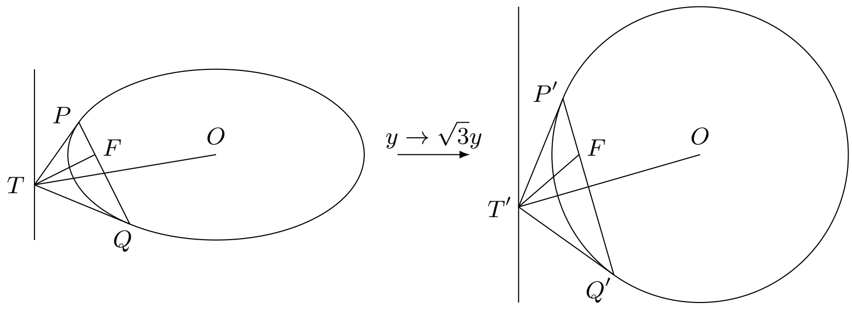


图 2

证明　由（I）的结果易知 $x=-3$ 正是椭圆的左准线，根据 2012 年安徽卷理数第 20 题的结论（见文 [1]），可知 TP,TQ 均为椭圆的切线。

现在，我们将椭圆拉伸成圆，如图 2，由于拉伸不改变相切也不改变线段比例，而拉伸后显然 OT' 垂直平分 $P'Q'$，所以拉伸前也平分（但不垂直）。 □

解答时间　2014-6-7 22:47:27

题目 7 (全国卷 II 理数 21)．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x$。

（I）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（II）设 $g(x)=f(2x)-4bf(x)$，当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，求 b 的最大值；

（III）已知 $1.4142<\sqrt{2}<1.4143$，估计 $\ln 2$ 的近似值（精确到 0.001）。

这道题第（III）问参考答案的解法实在巧妙，我承认我想不出来，在看到参考答案前我的解法如下。

解 （I）显然在 $\mathbb{R}$ 上递增，过程略；

（II）$g(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}-4x-4b(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}-2x)$，当 $x>0$ 时，令 $x=\ln t,\ t>1$，则

$$g(x)>0\iff g(\ln t)>0\iff h(t)=t^2-t^{-2}-4\ln t-4b(t-t^{-1}-2\ln t)>0,$$

对 $h(t)$ 求导得

$$\begin{aligned}h'(t)&=2t+2t^{-3}-4t^{-1}-4b(1+t^{-2}-2t^{-1})\\&=\frac{2(t-1)^2\big(t^2+2(1-b)t+1\big)}{t^3},\end{aligned}$$

令 $p(t)=t^2+2(1-b)t+1$，则 $p(t)$ 的对称轴为 $t=b-1$。

如果 $b>2$，则 $p(t)$ 在 $(1,b-1)$ 上递减，则当 $t\in(1,b-1)$ 时 $p(t)<p(1)=2(2-b)<0$，所以如果 $b>2$，则当 $t\in(1,b-1)$ 时 $h'(t)<0$，而 $h(1)=0$，所以当 $t\in(1,b-1)$ 时 $h(t)<0$，不符合题意。

当 $b\leqslant 2$ 时

$$h'(t)=\frac{2(t-1)^2\big((t-1)^2+2(2-b)t\big)}{t^3}>0,$$

而 $h(1)=0$，所以当 $t>1$ 时恒有 $h(t)>0$，符合题意。

综上，b 的最大值为 2；

（III）下面先证明，当 $x\geqslant 1$ 时，恒有

$$-x^2+8x-8x^{-1}+x^{-2}\leqslant 12\ln x\leqslant 3x+10-18x^{-1}+6x^{-2}-x^{-3},\tag{1}$$

两边的等号都仅当 $x=1$ 取得。

对于式 (1) 左边，在（II）的 $h(x)$ 中取 $b=2$ 即可得到；

对于式 (1) 右边，令

$$k(x)=3x+10-18x^{-1}+6x^{-2}-x^{-3}-12\ln x,$$

则 $k(1)=0$，求导得

$$k'(x)=3+18x^{-2}-12x^{-3}+3x^{-4}-12x^{-1}=\frac{3(x-1)^4}{x^4}\geqslant 0,$$

所以对任意 $x\geqslant 1$ 都有 $k(x)\geqslant 0$，即式 (1) 得证。

在式 (1) 中，取 $x=\sqrt{2}$，即得

$$-\frac14+\frac23\sqrt2<\ln 2<\frac{13}{6}-\frac{25}{24}\sqrt2,$$

由 $1.4142<\sqrt2$，得

$$-\frac14+\frac23\times 1.4142<\ln 2<\frac{13}{6}-\frac{25}{24}\times 1.4142,$$

即

$$0.6928<\ln 2<0.693541666\cdots,$$

所以 $\ln 2\approx 0.693$。 □

解答时间 2014-6-8 10:01:12

评注 或许你会问，式 (1) 右边是怎么想到的？其实很简单，你只要将式 (1) 右边的证明反过来读一遍就知道了，然后想必你也能构造出类似的估计式来了。

题目 8 (重庆理数 10). 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 满足 $\sin 2A+\sin(A-B+C)=\sin(C-A-B)+\dfrac{1}{2}$，面积 S 满足 $1\leqslant S\leqslant 2$，记 a, b, c 分别为 A, B, C 所对的边，则下列不等式一定成立的是 （ ）

A. $bc(b+c)>8$　　B. $ab(a+b)>16\sqrt{2}$　　C. $6\leqslant abc\leqslant 12$　　D. $12\leqslant abc\leqslant 24$

解 条件显然可以化为

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\frac{1}{2},$$

由文 [3] 中的三角恒等式有

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C,$$

代入得

$$\sin A\sin B\sin C=\frac{1}{8},$$

设 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R，由正弦定理，即得

$$abc=R^3,$$

又由面积公式 $S=\dfrac{abc}{4R}$ 及 $1\leqslant S\leqslant 2$，得

$$4R\leqslant abc\leqslant 8R,$$

所以

$$4^3abc\leqslant (abc)^3\leqslant 8^3abc,$$

即

$$8\leqslant abc\leqslant \sqrt{8^3},$$

所以

$$bc(b+c)>abc\geqslant 8,$$

因此选项 A 正确。 □

解答时间 2014-6-8 20:05:54

评注 如果纯粹应付考试，上面的解法足矣，但对于我来说，还应该对其他选项作出否定，这样才算是解完这道题，否定选项 C、D 是不难的，因为 $8\leqslant abc\leqslant\sqrt{8^3}$ 的等号都能取到，分别就是 $S=1$ 和 $S=2$ 时取得，然而在寻找选项 B 的反例时却发现不太容易，而且似乎还大有玩头，在进一步深入研究后，随即发现 $ab(a+b)$ 实际上有一个比 8 大一些的最小值，具体过程见本期后面的《两道 2014 高考题的最小值》一文。

题目 9 (辽宁理数 12). 已知定义在 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)$ 满足:

① $f(0)=f(1)=0$；

② 对所有 $x, y\in[0,1]$，且 $x\neq y$，有 $|f(x)-f(y)|<\dfrac{1}{2}|x-y|$；

若对所有 $x, y\in[0,1]$，$|f(x)-f(y)|<k$ 恒成立，则 k 的最小值为 （ ）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{2\pi}$　　D. $\dfrac{1}{8}$

解 不妨设 $0\leqslant x<y\leqslant 1$，则

$$\begin{aligned}2|f(x)-f(y)|&=\big|f(x)-f(0)+f(x)-f(y)-\big(f(y)-f(1)\big)\big|\\&\leqslant|f(x)-f(0)|+|f(x)-f(y)|+|f(y)-f(1)|\\&<\frac{1}{2}|x-0|+\frac{1}{2}|x-y|+\frac{1}{2}|y-1|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(y-x) + \frac{1}{2}(1-y) \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

即得

$$|f(x)-f(y)| < \frac{1}{4}。$$

另一方面，设 $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，容易验证如下函数

$$f(x) = \begin{cases} tx, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ -t(1-x), & \frac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

符合题意，而当 $t \to \frac{1}{2}$ 时 $\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right| = \frac{t}{2} \to \frac{1}{4}$。

综上，k 的最小值为 $\frac{1}{4}$。 □

解答时间 2014-6-9 14:13:58

评注 本题与文 [2] 类似，所以属于老题改编（也说不定早就有人这样改编过），所以上述过程其实用的还是文 [2] 中的方法，只不过后面就要多做一步举例子说明系数的最佳。

题目 10 (辽宁理数 16)**.** 对于 $c>0$，当非零实数 a, b 满足 $4a^2-2ab+4b^2-c=0$ 且使 $|2a+b|$ 最大时，$\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}$ 的最小值为________。

解 已知等式可以整理为

$$3(a+b)^2+5(a-b)^2=2c,$$

由柯西不等式，有

$$(2a+b)^2 = \left(\frac{3}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)\right)^2 \leqslant \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{20}\right)\left(3(a+b)^2+5(a-b)^2\right) = \frac{8c}{5},$$

等号成立当且仅当

$$\sqrt{\frac{3}{20}}(a+b) = \sqrt{\frac{15}{4}}(a-b) \iff 2a=3b,$$

所以当 $|2a+b|$ 取最大值时 $2a=3b$，代回已知等式，可知此时 $b=\pm\sqrt{\frac{c}{10}}$，所以

$$\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c} = -\frac{2}{b}+\frac{5}{c} \geqslant -\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{c}}+\frac{5}{c} = \left(\sqrt{2}-\sqrt{\frac{5}{c}}\right)^2-2 \geqslant -2,$$

当且仅当 $2a=3b$, $b=\sqrt{\frac{c}{10}}$, $c=\frac{5}{2}$ 时，即 $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{5}{2}$ 时取等。 □

解答时间 2014-6-9 14:41:17

评注 这题的解法肯定还有很多，至少还可以写出三角法、判别式法、均值法等等，即使是用柯西，也不止一种方式，因为配方形式不止一种。事实上，像这种简单二次型的最值问题早就被玩烂了，各种处理方法都很成熟，所以我就不扯太多了。我个人偏爱柯西不等式，所以就只写此柯西解法算了。

题目 11 (浙江理数 10)**.** 设函数 $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=2(x-x^2)$, $f_3(x)=\dfrac{1}{3}|\sin 2\pi x|$, $a_i=\dfrac{i}{99}$, $i=0,1,2,\cdots,99$。记 $I_k=|f_k(a_1)-f_k(a_0)|+|f_k(a_2)-f_k(a_1)|+\cdots+|f_k(a_{99})-f_k(a_{98})|$, $k=1,2,3$。则 ( )

A. $I_1<I_2<I_3$ B. $I_2<I_1<I_3$ C. $I_1<I_3<I_2$ D. $I_3<I_2<I_1$

解 因为 $f_1(x)$ 在 $[0,1]$ 上递增，所以 $I_1=f_1(1)-f_1(0)=1$；

因为 $f_2(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上递增，在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上递减且关于 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称，注意 $f_2\left(\dfrac{49}{99}\right)=f_2\left(\dfrac{50}{99}\right)$，所以

$$I_2=f_2\left(\frac{49}{99}\right)-f_2(0)+f_2\left(\frac{50}{99}\right)-f_2(1)=2f_2\left(\frac{50}{99}\right)<2f_2\left(\frac{1}{2}\right)=1;$$

因为 $f_3(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$ 上递增，在 $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$ 上递减，且关于 $x=\dfrac{1}{4}$ 及 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称，注意 $f_3\left(\dfrac{49}{99}\right)=f_3\left(\dfrac{50}{99}\right)$，以及由 $\dfrac{1}{4}-\dfrac{24}{99}>\dfrac{25}{99}-\dfrac{1}{4}>0$，可知 $f_3\left(\dfrac{24}{99}\right)<f_3\left(\dfrac{25}{99}\right)$，于是

$$\begin{aligned}
I_3&=2\left(f_3\left(\frac{25}{99}\right)-f_3(0)+f_3\left(\frac{25}{99}\right)-f_3\left(\frac{49}{99}\right)\right)\\
&=4f_3\left(\frac{25}{99}\right)-2f_3\left(\frac{49}{99}\right)\\
&>4f_3\left(\frac{7}{24}\right)-2f_3\left(\frac{11}{24}\right)\\
&=\frac{4}{3}\sin 105^\circ-\frac{2}{3}\sin 165^\circ\\
&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6}\\
&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{18}}{6}\\
&>\frac{\sqrt{4}+\sqrt{16}}{6}\\
&=1。
\end{aligned}$$

综上，$I_3>I_1>I_2$。 □

解答时间 2014-6-17 00:47

评注 实际上，如果是应付考试，那么上述解法显然是非常不实际的，命题者将 f_3 的系数设为 $\dfrac{1}{3}$ 的目的明显是想让你估算，而估算的话这道题就不必动笔了。

当函数有增有减时，由于点很多，则 I_k 大约为各单调区间的值域长度之和，因此 I_2 就约为 $2\times\dfrac{1}{2}$，而 I_3 则约为 $4\times\dfrac{1}{3}$，所以 I_3 必然是最大的，至于 I_1 和 I_2，I_1 精确等于 1，I_2 虽然约为 1 但由于那些点都取不到顶点，所以应该稍微小一点点，因此 I_2 最小。

参考文献

[1] 郭子伟. 对 2012 年的几道高考数学题的解答及研究 [J]. 数学空间, 2012(2):18

[2] 廖凡. ab1962 解题集精选（十四）[J]. 数学空间, 2013(4):5

[3] 郭子伟. 三角函数公式微型整理 [J]. 数学空间, 2011(2):14

1.2 ab1962 解题集精选（十七）——廖凡

本期的题目及解答是由历任版主 ab1962 的网上解题集的第 801 ∼ 850 题中精选出，仍然由 kuing 作选题、排版及评注，更多说明请参看《数学空间》总第 1 期。

题目 1. 设集合 $M=\left\{x\middle|x=\cos\dfrac{5m\pi}{12},m\in\mathbb{N}\right\}$, $N=\left\{x\middle|x=\cos\dfrac{n\pi}{12},n\in\mathbb{N}\right\}$，则 M, N 的关系如何，并证明。

证明

$$\begin{aligned}N=\Big\{&\cos\frac{0\pi}{12},\cos\frac{1\pi}{12},\cos\frac{2\pi}{12},\cos\frac{3\pi}{12},\cos\frac{4\pi}{12},\cos\frac{5\pi}{12},\cos\frac{6\pi}{12},\cos\frac{7\pi}{12},\cos\frac{8\pi}{12},\\&\cos\frac{9\pi}{12},\cos\frac{10\pi}{12},\cos\frac{11\pi}{12},\cos\frac{12\pi}{12}\Big\},\\M=\Big\{&\cos\frac{0\pi}{12},\cos\frac{5\pi}{12},\cos\frac{10\pi}{12},\cos\frac{15\pi}{12},\cos\frac{20\pi}{12},\cos\frac{25\pi}{12},\cos\frac{30\pi}{12},\cos\frac{35\pi}{12},\cos\frac{40\pi}{12},\\&\cos\frac{45\pi}{12},\cos\frac{50\pi}{12},\cos\frac{55\pi}{12},\cos\frac{60\pi}{12}\Big\}\\=\Big\{&\cos\frac{0\pi}{12},\cos\frac{5\pi}{12},\cos\frac{10\pi}{12},\cos\frac{9\pi}{12},\cos\frac{4\pi}{12},\cos\frac{1\pi}{12},\cos\frac{6\pi}{12},\cos\frac{11\pi}{12},\cos\frac{8\pi}{12},\\&\cos\frac{3\pi}{12},\cos\frac{2\pi}{12},\cos\frac{7\pi}{12},\cos\frac{12\pi}{12}\Big\},\end{aligned}$$

所以 $M=N$。

参考方法：由 5 与 12 互质可得集合 $A=\{x\mid x=n,n\in\mathbb{N}^+\}$ 与 $B=\{x\mid x=5n,n\in\mathbb{N}^+\}$ 对 12 的剩余类都是 12 类。 □

题目 2. $\triangle ABC$ 中，$a\cos A+b\cos B=c\cos C$，判断三角形形状

解法一 由正弦定理得

$$\begin{aligned}a\cos A+b\cos B=c\cos C&\iff\sin A\cos A+\sin B\cos B=\sin C\cos C\\&\iff\sin 2A+\sin 2B=\sin 2C\\&\iff 2\sin(A+B)\cos(A-B)=-2\sin(A+B)\cos(A+B)\\&\iff\cos(A-B)=-\cos(A+B)\\&\iff 2\cos A\cos B=0,\end{aligned}$$

故 $A=90^\circ$ 或 $B=90^\circ$。 □

解法二 由余弦定理得

$$\begin{aligned}a\cos A+b\cos B=c\cos C&\iff\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2bc}+\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{2ac}=\frac{c(b^2+a^2-c^2)}{2ab}\\&\iff a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)=c^2(b^2+a^2-c^2)\\&\iff a^4+b^4-2a^2b^2=c^4\\&\iff(a^2-b^2)^2=c^4,\end{aligned}$$

故 $a^2=b^2+c^2$ 或 $b^2=a^2+c^2$。 □

题目 3. 如图 1，已知圆 $M: x^2+(y-2)^2=1$，Q 是 x 轴上的动点，QA、QB 分别切 $\odot M$ 于 A、B 两点。求动弦 AB 的中点 P 的轨迹方程。

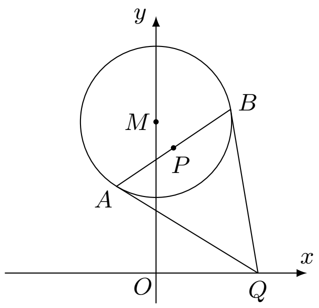


图 1

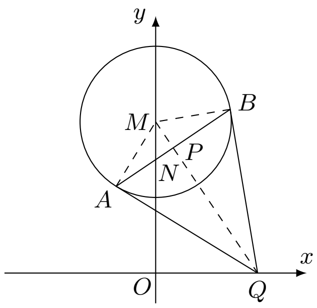


图 2

解 设 $Q(x_0,0)$，已知圆的圆心 $M(0,2)$，则动弦 AB 的方程是

$$xx_0+(-2)(y-2)=1,$$

直线 MQ 的方程是

$$\frac{x}{x_0}+\frac{y}{2}=1,$$

消去 x_0 得

$$x^2=(2y-3)\left(1-\frac{y}{2}\right),$$

整理得

$$x^2+\left(y-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{1}{16},$$

即为所求。 □

kuing 评注 显然这题只要初中平几即可解，如图 2，设 AB 与 OM 交于 N，则由 O, N, P, Q 四点共圆有 $MN\cdot MO=MP\cdot MQ=MB^2$，可见 N 为定点，所以 P 的轨迹为以 MN 为直径的圆，另外需要注意 P 不会与 M 重合，所以以上解法最终的轨迹方程应去掉 M 点。

题目 4. 计算 $8\sin^2\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{3\pi}{7}$。

解 因为

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{8},$$

所以

$$\begin{aligned}8\sin^2\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{3\pi}{7} &= \left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{7}\right)\left(1-\cos\frac{6\pi}{7}\right)\\ &=1-\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{4\pi}{7}-\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\\ &\quad-\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=1-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\right)-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\\
&=1-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}+\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\right)-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\\
&=1-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\\
&=\frac{7}{8}\text{。}
\end{aligned}
$$

□

kuing 评注 下面用高级点的方法给出另解。

解 根据第二类切比雪夫多项式，我们可以得到七倍角公式

$$\frac{\sin 7\theta}{\sin\theta}=-64\sin^6\theta+112\sin^4\theta-56\sin^2\theta+7,$$

由此可见 $\sin^2\frac{\pi}{7}, \sin^2\frac{2\pi}{7}, \sin^2\frac{3\pi}{7}$ 都满足方程

$$-64x^3+112x^2-56x+7=0,$$

而 $\sin^2\frac{\pi}{7}, \sin^2\frac{2\pi}{7}, \sin^2\frac{3\pi}{7}$ 三者的值都不相同，所以 $\sin^2\frac{\pi}{7}, \sin^2\frac{2\pi}{7}, \sin^2\frac{3\pi}{7}$ 就是上述方程的全部根，于是由韦达定理可得

$$
\begin{aligned}
\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}&=\frac{7}{4},\\
\sin^2\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{3\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}\sin^2\frac{\pi}{7}&=\frac{7}{8},\\
\sin^2\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{3\pi}{7}&=\frac{7}{64},
\end{aligned}
$$

所以原式 $=\frac{7}{8}$。 □

更一般的结论见 `http://bbs.pep.com.cn/thread-250665-1-1.html`。

题目 5. 过点 $K(2,1)$ 作直线 l 交 x、y 轴正半轴于 A、B 两点，当 $|KA|\cdot|KB|$ 取到最小值时，求直线 l 的方程。

解 设直线 $l:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$（$a>0, b>0$），则 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$，得 $b=\frac{a}{a-2}$，故 $a>2$，于是

$$
\begin{aligned}
|KA|^2\cdot|KB|^2&=[(a-2)^2+1][4+(b-1)^2]\\
&=[(a-2)^2+1]\left[4+\left(\frac{2}{a-2}\right)^2\right]\\
&=4\left[(a-2)^2+\frac{1}{(a-2)^2}\right]+8\\
&\geqslant 8\sqrt{(a-2)^2\cdot\frac{1}{(a-2)^2}}+8
\end{aligned}
$$

$$= 16,$$

当且仅当 $a = 3$ 时上式取等号，此时 $|KA| \cdot |KB|$ 取到最小值，$a = 3$ 时直线 l 的方程是 $x + y - 3 = 0$。 □

kuing 评注 也可以利用柯西不等式，下面将 K 设为第一象限内任意一定点 $K(x_0, y_0)$。

解 类似地设直线，则 $\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b} = 1$ 且 $a > x_0 > 0, b > y_0 > 0$，去分母整理得 $(a - x_0)(b - y_0) = x_0y_0$，由柯西不等式得

$$|KA|^2 \cdot |KB|^2 = [(a - x_0)^2 + y_0^2][(b - y_0)^2 + x_0^2] \geqslant [(a - x_0)(b - y_0) + x_0y_0]^2 = 4x_0^2y_0^2,$$

即得

$$|KA| \cdot |KB| \geqslant 2x_0y_0,$$

等号成立当且仅当 $x_0(a - x_0) = y_0(b - y_0)$，再与 $(a - x_0)(b - y_0) = x_0y_0$ 相加，得 $(x_0 + b - y_0)(a - x_0) = y_0(b - y_0 + x_0)$，因为 $x_0 + b - y_0 > 0$，所以 $a - x_0 = y_0$，即 $a = x_0 + y_0$，代回去也得 $b = x_0 + y_0$，可见 $|KA| \cdot |KB|$ 取最小值时 l 的斜率一定为 -1。 □

以上都是代数解法，而作为几何题，当然也要考虑几何解法，尽量让初中生也看得懂。

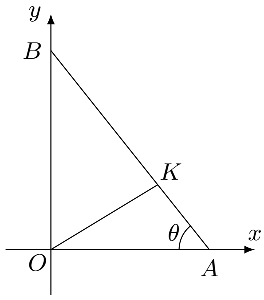


图 3

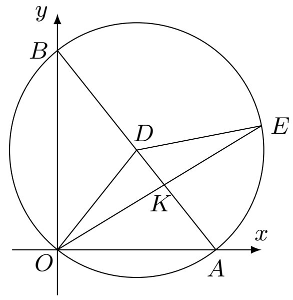


图 4

解 如图 3，设 $\angle KAO = \theta$，由正弦定理

$$\frac{KA \cdot KB}{OK^2} = \frac{\sin\angle KOA}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin\angle KOB}{\sin(90^\circ - \theta)} = \frac{2\sin\angle KOA \sin\angle KOB}{\sin 2\theta},$$

而 $OK^2, \angle KOA, \angle KOB$ 都是定的，所以显然 $KA \cdot KB$ 取最小值当且仅当 $\theta = 45^\circ$，亦即 l 的斜率为 -1 时，最小值为 $2OK^2 \sin\angle KOA \sin\angle KOB$，亦即 $2x_0y_0$。 □

上述几何解法还能将本题推广，即 $\angle AOB$ 不是直角的情形，方法一样，这里不再详写。

另外，由乘积的形式联想到相交弦定理，于是再得原题的另一几何解法。

解 如图 4，作 $\triangle OAB$ 的外接圆，圆心为 AB 的中点 D，延长 OK 交圆于 E，由相交弦定理有

$$KA \cdot KB = KO^2 \cdot \frac{KE}{KO} = KO^2 \cdot \frac{S_{\triangle DKE}}{S_{\triangle DKO}} = KO^2 \cdot \frac{\sin\angle KDE}{\sin\angle KDO} = KO^2 \cdot \frac{\sin 2\angle KOA}{\sin\angle KDO},$$

而 $OK^2, \angle KOA$ 都是定的，所以显然 $KA \cdot KB$ 取最小值当且仅当 $\angle KDO = 90^\circ$，亦即 $OD \perp AB$ 时，亦即 l 的斜率为 -1 时，最小值为 $KO^2 \sin 2\angle KOA$，亦即 $2x_0y_0$。 □

这样，本题修改一下表达就可以给初中生做了。

题目 6. 已知 $\triangle ABC$，设 $y=2+\cos C\cos(A-B)-\cos^2 C$。
（1）证明：任意交换 A、B、C 的位置，y 的值不变；
（2）求 y 的最大值。

解 （1）

$$\begin{aligned}y&=2+\cos C\cos(A-B)-\cos^2 C\\&=2-\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos^2(A+B)\\&=2-\cos(A+B)[\cos(A-B)+\cos(A+B)]\\&=2-\cos(A+B)(2\cos A\cos B)\\&=2+2\cos A\cos B\cos C,\end{aligned}$$

所以任意交换 A、B、C 的位置，y 的值不变；
（2）

$$y=-\left(\cos C-\frac{1}{2}\cos(A-B)\right)^2+2+\frac{1}{4}\cos^2(A-B)\leqslant 2+\frac{1}{4}\cos^2(A-B)\leqslant\frac{9}{4},$$

当且仅当 $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ 时等号成立，因此 $y_{\max}=\dfrac{9}{4}$。 □

1.3 由通项公式求递推关系及其应用——程汉波

在中学数学中，由“递推关系”求“通项公式”的题目是常见的，而且占据数列试题的很大篇幅。但同时笔者也在思索这样一个问题：为何只见“由递推关系求通项公式”，却鲜有“由通项公式求递推关系”？用百度或 Google 检索“由通项公式求递推关系”，有大量资源出现，但遗憾的是第一条就与我们要找的内容不符。检索结果的大部分都是“由递推关系求通项公式”。这说明：目前我们对“由递推关系求通项公式”的关注程度已远远超过了“由通项公式求递推关系”。

你也许会纳闷：通项公式已经告诉我们数列的每一项了，数列性质均蕴含其中，干嘛还要求递推关系呢？这不是舍近求远吗？

假若已知数列的通项公式，让你求其某一项，你会怎么做？这还不简单，代入通项公式计算即可，但事实有时却并非如此简单。

例如：已知斐波那契数列的通项公式为 $F(n)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$，试求 $F(20)$。

代入计算将会极其繁琐：

$$
\begin{aligned}
F(20)&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{21}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{21}\right]\\
&=\frac{1}{2^{21}\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{21}\mathrm{C}_{21}^{k}\left[\left(\sqrt{5}\right)^{k}-\left(-\sqrt{5}\right)^{k}\right]\\
&=\frac{1}{2^{20}\sqrt{5}}\sum_{k=1}^{11}\mathrm{C}_{21}^{k}\left(\sqrt{5}\right)^{2k-1}\\
&=\cdots,
\end{aligned}
$$

纵使我们费尽“九牛二虎之力”，也难以算出右端这一串无理数相加得到的结果竟是整数 10946。

但如果知道斐波那契数列的递推公式：

$$F(n+2)=F(n+1)+F(n)，F(0)=F(1)=1，$$

且有足够耐性的话，你开始一个个地往下计算得：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946，于是 $F(20)=10946$。

再如：已知错位排列的通项公式为

$$D\left(n\right)=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k!}=n!\left(1+\frac{-1}{1!}+\frac{\left(-1\right)^{2}}{2!}+\cdots+\frac{\left(-1\right)^{n}}{n!}\right),$$

试求 $D(10)$。

代入计算将会极其繁琐：

$$D\left(10\right)=10!\sum_{k=0}^{10}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k!}=10!\left(1+\frac{-1}{1!}+\frac{\left(-1\right)^{2}}{2!}+\cdots+\frac{\left(-1\right)^{10}}{10!}\right)。$$

但如果知道错位排列的递推公式（其证明见例 7）：

$$D(n+2)=(n-1)\left[D\left(n+1\right)+D(n)\right]，D(0)=1，D(1)=0，$$

同样地，一个个地往下计算便得到：1, 0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496，于是 $D(10)=133496$。

由上观之，已知通项公式在实际解题中并非万能，有时寻求递推关系反而独辟蹊径，使问题变得清晰简单。下面以若干实例说明“已知通项公式，寻求递推关系”在解题中的应用，抛砖引玉，望引起同行注意。

例 1. 实数 a, b, x, y 满足方程组

$$\begin{cases} ax+by=3, \\ ax^2+by^2=7, \\ ax^3+by^3=16, \\ ax^4+by^4=42, \end{cases}$$

求 ax^5+by^5 的值。

解 设 $a_n=ax^n+by^n$，则 $a_1=3, a_2=7, a_3=16, a_4=42, a_5=ax^5+by^5$。

逆用特征根法知，数列 $\{a_n\}$ 满足二阶齐次线性递推关系 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$，分别令 $n=1, n=2$ 得

$$\begin{cases} a_3+pa_2+qa_1=0, \\ a_4+pa_3+qa_2=0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p=14, \\ q=-38, \end{cases}$$

于是

$$a_{n+2}=-14a_{n+1}+38a_n,$$

所以

$$a_5=-14a_4+38a_3=-14\times 42+38\times 16=20,$$

即 $ax^5+by^5=20$。 □

例 2. 设 $n\in\mathbb{N}$，求证：$a_n=11^{n+2}+12^{2n+1}$ 能被 133 整除。

证明 由于 $a_n=11^{n+2}+12^{2n+1}=121\cdot 11^n+12\cdot 144^n$，逆用特征根法知，数列 $\{a_n\}$ 满足二阶齐次线性递推关系 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$，且特征根为 $x_1=11, x_2=144$，于是

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p=-155, \\ q=1584, \end{cases}$$

于是

$$a_{n+2}=155a_{n+1}-1584a_n,$$

又易得 $a_0=133, a_1=3059$ 都能够被 133 整除，所以由上式知，所有的 a_n（$n\in\mathbb{N}$）都能够被 133 整除。 □

例 3. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt5}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right], n\in\mathbb{N}^+$，记 $S_n=\mathrm{C}_n^1a_1+\mathrm{C}_n^2a_2+\cdots+\mathrm{C}_n^na_n$，试求所有的正整数 n，使得 S_n 被 8 整除。

解 记 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt5}{2}, \beta=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$，则 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt5}\left(\alpha^n-\beta^n\right), n\in\mathbb{N}^+$，则

$$\begin{aligned} S_n&=\mathrm{C}_n^1a_1+\mathrm{C}_n^2a_2+\cdots+\mathrm{C}_n^na_n \\ &=\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(1+\mathrm{C}_n^1\alpha+\mathrm{C}_n^2\alpha^2+\cdots\mathrm{C}_n^n\alpha^n\right)-\left(1+\mathrm{C}_n^1\beta+\mathrm{C}_n^2\beta^2+\cdots\mathrm{C}_n^n\beta^n\right)\right] \\ &=\frac{1}{\sqrt5}\left[(\alpha+1)^n-(\beta+1)^n\right] \\ &=\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)^n\right], \end{aligned}$$

逆用特征根法知，数列 $\{S_n\}$ 满足二阶齐次线性递推关系 $S_{n+2}+pS_{n+1}+qS_n=0$，且特征根为 $x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，于是

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p=-3, \\ q=1, \end{cases}$$

于是

$$S_{n+2}=3S_{n+1}-S_n,$$

所以

$$S_{n+3}=3S_{n+2}-S_{n+1}=8S_{n+2}-5S_{n+2}-S_{n+1}=8S_{n+2}-5(3S_{n+1}-S_n)-S_{n+1}=8S_{n+2}-16S_{n+1}-5S_n,$$

即

$$S_{n+3}=8S_{n+2}-16S_{n+1}-5S_n。$$

因为 $(5,8)=1$，所以 S_n 被 8 整除的充要条件是 S_{n+3} 被 8 整除。

又易得 $S_1=1, S_2=3, S_3=8$，于是 S_{3k+1}, S_{3k+2} 不能被 8 整除，S_{3k} 能被 8 整除。所以，使 S_n 能被 8 整除的一切正整数 $n=3k$（$k\in\mathbb{N}^+$）。 □

注 类似地，我们可以推得，$3\mid S_n \iff n$ 为偶数，于是得 $24\mid S_n \iff n=6k$（$k\in\mathbb{N}^+$）。

例 4. （《数学通讯》问题征解 156）已知 $a_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^{6n-3}+\left(3-2\sqrt{2}\right)^{6n-3}\right]$，试确定 a_n 的个位数字，并说明理由。

解 记 $\alpha=3+2\sqrt{2}, \beta=3-2\sqrt{2}$，则 $a_n=\dfrac{1}{2}(\alpha^{6n-3}+\beta^{6n-3})=\dfrac{\left(\alpha^6\right)^n}{2\alpha^3}+\dfrac{\left(\beta^6\right)^n}{2\beta^3}$，逆用特征根法知，数列 $\{a_n\}$ 满足二阶齐次线性递推关系 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$，且特征根为 $x_1=\alpha^6, x_2=\beta^6$，于是

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p=-39202, \\ q=1, \end{cases}$$

于是

$$a_{n+2}=39202a_{n+1}-a_n,$$

所以 $a_{n+2}\equiv 39202a_{n+1}-a_n\equiv 2a_{n+1}-a_n \pmod{10}$，即 $a_{n+2}-a_{n+1}\equiv a_{n+1}-a_n \pmod{10}$。又易得 $a_1=99$，$a_2=3880899$，所以 $a_n-a_{n-1}\equiv a_2-a_1\equiv 0 \pmod{10}$，所以 $a_n\equiv a_{n-1}\equiv\cdots\equiv a_1\equiv 9 \pmod{10}$，即 a_n 的个位数字的个位数字为 9。 □

例 5. （2012 年“北约联盟”自主招生试题）对任意正整数 n，$\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ 必可以表示成 $\sqrt{s}+\sqrt{s-1}$ 的形式，其中 $s\in\mathbb{N}^+$。

解 构造数列 $a_n=\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2}$，逆用特征根法知，数列 $\{a_n\}$ 满足二阶齐次线性递推关系 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$，且特征根为 $x_1=1+\sqrt{2}, x_2=1-\sqrt{2}$，于是

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p=-2, \\ q=-1, \end{cases}$$

于是 $\{a_n\}$ 满足的递推关系为

$$a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n,$$

且易得 $a_1=1, a_3=3$，所以 $\{a_n\}$ 为正整数数列。又

$$a_{2n}^2-1=\left[\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}}{2}\right]^2-1=\left[\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}}{2}\right]^2,$$

于是

$$\sqrt{a_{2n}^2-1}=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}}{2},$$

则

$$a_{2n}+\sqrt{a_{2n}^2-1}=\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n},$$

即

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}=\sqrt{a_{2n}^2}+\sqrt{a_{2n}^2-1},$$

同理可得

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}=\sqrt{a_{2n+1}}+\sqrt{a_{2n+1}^2+1}。$$

综上所述：对任意正整数 n，$\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ 必可以表示成 $\sqrt{s}+\sqrt{s-1}$ 的形式，其中 $s\in\mathbb{N}^+$。 □

例 6. 已知 $a_n=\dfrac{\sqrt{2}\left[1+\left(2\sqrt{2}-3\right)^n\right]}{1-\left(2\sqrt{2}-3\right)^n}$，求证：数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是有理数。

证明 由条件可解得 $\left(2\sqrt{2}-3\right)^n=\dfrac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}$，于是

$$\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}=\left(2\sqrt{2}-3\right)^n=\left(2\sqrt{2}-3\right)\cdot\left(2\sqrt{2}-3\right)^{n-1}=\left(2\sqrt{2}-3\right)\cdot\frac{a_{n-1}-\sqrt{2}}{a_{n-1}+\sqrt{2}},$$

解得

$$a_n=\frac{a_{n-1}+2}{a_{n-1}+1}。$$

又因为 $a_1=\dfrac{\sqrt{2}\left[1+\left(2\sqrt{2}-3\right)\right]}{1-\left(2\sqrt{2}-3\right)}=1$，所以由 $a_n=\dfrac{a_{n-1}+2}{a_{n-1}+1}$ 可知数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是有理数，得证。 □

例 7. 设 $n>2, n\in\mathbb{N}^+, a_n=n!\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}$，求证：$a_n$ 能被 $n-1$ 整除。

证明 当 $n\geqslant 1$ 时

$$a_n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=n!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}+n!\frac{(-1)^n}{n!}=na_{n-1}+(-1)^n,$$

于是

$$a_{n+1}=(n+1)\,a_n+(-1)^{n+1}=(n+1)\,a_n-(-1)^n,$$

两式相加得

$$a_{n+1}+a_n=(n+1)\,a_n+na_{n-1},$$

即

$$a_{n+1}=n\left(a_n+a_{n-1}\right),$$

所以由 $a_0=1,\ a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=2$ 及上式知 a_n 均为整数，且 a_{n+1} 能被 n 整除，所以 a_n 能被 $n-1$ 整除。 □

例 8. 设 $n\in\mathbb{N}^+$，求 $S_n=1^2+2^2+\cdots+n^2$。

解 易得 $S_{n+1}-S_n=(n+1)^2$，于是 $S_{n+2}-S_{n+1}=(n+2)^2$，两式相减得 $S_{n+2}-2S_{n+1}+S_n=2n+3$，于是 $S_{n+3}-2S_{n+2}+S_{n+1}=2n+5$，与上一式相减得

$$S_{n+3}-3S_{n+2}+3S_{n+1}-S_n=2,$$

于是 $S_{n+4}-3S_{n+3}+3S_{n+2}-S_{n+1}=2$，继续相减得

$$S_{n+4}-4S_{n+3}+6S_{n+2}-4S_{n+1}+S_n=0,$$

为四阶线性齐次递推关系，其特征方程为 $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$，求得特征根为 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$，于是可设

$$S_n=\left(A+Bn+Cn^2+Dn^3\right)\cdot 1^n=A+Bn+Cn^2+Dn^3,$$

又易得 $S_1=1,\ S_2=5,\ S_3=14,\ S_4=30$，可以解得 $A=0,\ B=\dfrac{1}{3},\ C=\dfrac{1}{2},\ D=\dfrac{1}{6}$。

所以，$S_n=\dfrac{1}{3}n+\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{6}n^3=\dfrac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$。 □

注 该方法理论上可以求出任意自然数等幂和 $S_k\left(n\right)=1^k+2^k+\cdots+n^k$ 的结果，其关键是：将自然数幂和视作 a_n，然后不断作差找到数列 $\{a_n\}$ 的线性齐次递推关系式，再利用特征根法求得其通项公式。

数列作为高考的重点和难点，深受师生重视。从笔者的教学经验来看，关于数列的研究颇多，尤其是数列通项公式求法以及数列求和方法。但我们的教材和教师很少提及“由数列的递推关系寻求通项公式”的问题。一个简单的逆向思维，就将我们推向另一片天地，真可谓“学而不思则罔，思而不学则怠”。

能力提升

2.1 两道 2014 高考题的最小值——郭子伟

题目 1 (全国卷 I 理数 24). 若 $a>0, b>0$，且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\sqrt{ab}$。

（I）求 a^3+b^3 的最小值；

（II）是否存在 a, b，使得 $2a+3b=6$？并说明理由。

这道题本身是十分简单的（见参考答案），本文针对第（II）问，将进一步求出 $2a+3b$ 的最小值。

解 由条件得 $(a+b)^2=a^3b^3$，令 $a=tb$，则

$$(2a+3b)^4=\frac{(2a+3b)^4(a+b)^2}{a^3b^3}=\frac{(2t+3)^4(t+1)^2}{t^3},$$

待定系数 $k>0$，由加权均值不等式，有

$$\begin{aligned}(2t+3)^4(t+1)^2&=16\left(t+\frac{3k}{2}\cdot\frac{1}{k}\right)^4\left(t+k\cdot\frac{1}{k}\right)^2\\&\geqslant 16\left(1+\frac{3k}{2}\right)^4(t\cdot k^{-3k/2})^{4/(1+3k/2)}(1+k)^2(t\cdot k^{-k})^{2/(1+k)}\\&=(2+3k)^4(1+k)^2k^A\cdot t^B,\end{aligned}$$

其中

$$A=\frac{-2k(8+9k)}{(2+3k)(1+k)},$$
$$B=\frac{2(6+7k)}{(2+3k)(1+k)},$$

令 $B=3$，解出唯一正数 k 为

$$k=\frac{\sqrt{217}-1}{18},$$

此时 $A=-3$，代回去即得

$$\begin{aligned}(2t+3)^4(t+1)^2&\geqslant\left(2+3\cdot\frac{\sqrt{217}-1}{18}\right)^4\left(1+\frac{\sqrt{217}-1}{18}\right)^2\left(\frac{\sqrt{217}-1}{18}\right)^{-3}\cdot t^3\\&=\frac{2}{27}\big(15983+1085\sqrt{217}\big)t^3,\end{aligned}$$

所以

$$2a+3b\geqslant\sqrt[4]{\frac{2}{27}\big(15983+1085\sqrt{217}\big)}(\approx 6.9757)。\tag{1}$$

现在我们来看式 (1) 的取等条件，由加权均值不等式的取等条件知

$$t=\frac{1}{k}=\frac{1+\sqrt{217}}{12},$$

而由 $(a+b)^2=a^3b^3$ 且 $a=tb$ 解得

$$\begin{cases}a=\sqrt[4]{t(1+t)^2},\\ b=\sqrt[4]{\dfrac{(1+t)^2}{t^3}},\end{cases}$$

代入 t 的值就是式 (1) 具体取等的 a, b，所以式 (1) 右边的值就是 $2a+3b$ 的最小值。 $\square$

解答时间 2014-6-7 21:56:33

题目 2 (重庆理数 10)**.** 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 满足 $\sin 2A+\sin(A-B+C)=\sin(C-A-B)+\dfrac{1}{2}$，面积 S 满足 $1\leqslant S\leqslant 2$，记 a, b, c 分别为 A, B, C 所对的边，则下列不等式一定成立的是 （ ）

A. $bc(b+c)>8$ B. $ab(a+b)>16\sqrt{2}$ C. $6\leqslant abc\leqslant 12$ D. $12\leqslant abc\leqslant 24$

这题道在本期前面的《对 2014 年的几道高考数学题的解答》一文（以下简称“原文”）中我已经作出了解答，原文得到的是 $bc(b+c)>8$，从而选 A，然而在否定选项 B 时发现 8 并不是 $bc(b+c)$ 的下确界，本文将进一步给出 $bc(b+c)$ 的最小值。

解 由原文的过程我们已经知道条件 $\sin 2A+\sin(A-B+C)=\sin(C-A-B)+\dfrac{1}{2}$ 等价于 $abc=R^3$，现在，由 a, b, c 为三角形三边，我们可以设 $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$, $x, y, z>0$，那么由海伦公式有

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}},$$

于是

$$\begin{aligned}abc=R^3 &\iff (x+y)(y+z)(z+x)=\left(\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}\right)^3\\ &\iff 2^{12}x^3y^3z^3(x+y+z)^3=(x+y)^4(y+z)^4(z+x)^4,\end{aligned}$$

设 $p=\dfrac{y}{y+z}$, $q=\dfrac{z}{y+z}$, $k=\dfrac{x}{y+z}$，则 $p, q, k>0$, $p+q=1$，代入上式化简，等价于

$$2^{12}k^3p^3q^3(k+1)^3=(k+p)^4(k+q)^4,$$

由均值不等式，有

$$\begin{aligned}2^{12}k^3p^3q^3(k+1)^3&=(k^2+k+pq)^4\\&=3^{-4}\big(3(k^2+k)+pq+pq+pq\big)^4\\&\geqslant 3^{-4}\cdot 4^4\cdot 3(k^2+k)p^3q^3\\&=3^{-3}2^8(k+1)kp^3q^3,\end{aligned}$$

得到

$$k(k+1)\geqslant 3^{-3/2}2^{-2},$$

即

$$k^2+k-\frac{\sqrt{3}}{36}\geqslant 0,$$

解得

$$k\geqslant\frac{-3+\sqrt{9+\sqrt{3}}}{6},$$

于是

$$\frac{b+c}{a}=\frac{z+x+x+y}{y+z}=1+2k\geqslant\frac{\sqrt{9+\sqrt{3}}}{3}(\approx 1.09199),$$

这样，我们就得到

$$bc(b+c) \geqslant \frac{\sqrt{9+\sqrt{3}}}{3}abc，$$

再根据原文中得到的 $abc \geqslant 8$，所以

$$bc(b+c) \geqslant \frac{8\sqrt{9+\sqrt{3}}}{3}(\approx 8.73595)。$$

现在我们来看取等条件，根据上述推理过程，均值那一步的取等条件为 $3(k^2+k)=pq$，代入所设等价于 $3x(x+y+z)=yz$，最后一步取等条件为 $abc=8$，由原文的推理知这等价于 $S=1$，即 $xyz(x+y+z)=1$，所以，取等条件为

$$\begin{cases} 2^{12}x^3y^3z^3(x+y+z)^3=(x+y)^4(y+z)^4(z+x)^4, \\ 3x(x+y+z)=yz, \\ xyz(x+y+z)=1, \end{cases}$$

由后两个方程得 $yz=\sqrt{3}$，于是 $(x+y)(z+x)=x(x+y+z)+yz=\dfrac{4}{3}yz=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$，所以第一个方程化简为 $2^{12}=4^4 3^{-2}(y+z)^4$，所以 $y+z=2\sqrt{3}$，因此 y, z 为方程 $t^2-2\sqrt{3}t+\sqrt{3}=0$ 的两根，解得

$$\begin{cases} y=\sqrt{3}\pm\sqrt{3-\sqrt{3}}, \\ z=\sqrt{3}\mp\sqrt{3-\sqrt{3}}, \end{cases}$$

将 $yz=\sqrt{3}$, $y+z=2\sqrt{3}$ 代回方程组中也容易解得

$$x=-\sqrt{3}+\sqrt{\frac{9+\sqrt{3}}{3}},$$

再代回 a, b, c 中，即得到最终的取等条件为

$$\begin{cases} a=2\sqrt{3}, \\ b=\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{3}}{3}}\pm\sqrt{3-\sqrt{3}}, \\ c=\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{3}}{3}}\mp\sqrt{3-\sqrt{3}}。 \end{cases}$$

综上所述，$bc(b+c)$ 的最小值就是

$$\frac{8\sqrt{9+\sqrt{3}}}{3}(\approx 8.73595)。$$

同理，$ab(a+b)$, $ca(c+a)$ 亦复如是。 □

解答时间 2014-6-12 17:44 ~ 18:50

2.2 《中学数学教学》有奖解题擂台 (63) 题 1 的证明——郭子伟

文 [1] 中邵剑波老师提出如下题目。

题目 1. 证明或否定：设 $a>b>c>0$, $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}+\dfrac{z_1^2}{c^2}=1$, $\dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}+\dfrac{z_2^2}{c^2}=1$，且

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2+\left(z-\frac{z_1+z_2}{2}\right)^2=\frac{1}{4}[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2],$$

则

$$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2+b^2+c^2。$$

本文将证明更强的命题：在相同题设下，有

$$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2+b^2。\tag{1}$$

在证明式 (1) 之前，先引入一些引理作为准备。

引理 1. 若椭球面 S 与平面 α 相交，则交线必为椭圆型曲线。

（注：本文将圆也归类为椭圆型曲线，并且认为其长轴与短轴相等）

证明 建立空间直角坐标系，使交线在平面 xOy 上，由于椭球是二次曲面，因此 S 的方程必为 $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+Hy+Iz+J=0$ 的形式，于是交线在平面 xOy 上的方程就是 $Ax^2+By^2+Dxy+Gx+Hy+J=0$，而显然交线为闭合曲线，因此必定为椭圆型曲线，引理 1 得证。 □

引理 2. 设椭球面 $S:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 满足 $a\geqslant b\geqslant c>0$，$O$ 为坐标原点，P 为 S 上任意一点，则 $c\leqslant OP\leqslant a$。

证明 设 $P(x,y,z)$，则有

$$1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{OP^2}{c^2},$$
$$1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\geqslant\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=\frac{OP^2}{a^2},$$

即得 $c\leqslant OP\leqslant a$，引理 2 得证。 □

引理 3. 由椭球面 $S:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的中心 O 引三条互相垂直的射线，分别交 S 于 P_1,P_2,P_3，则

$$\frac{1}{OP_1^2}+\frac{1}{OP_2^2}+\frac{1}{OP_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}。$$

证明 设 OP_i 与 x, y, z 轴的夹角的余弦值分别为 λ_i, μ_i, ν_i，由于 OP_i 两两垂直，可以把他们看成长方体中的边，而把三个坐标轴看成长方体中的对角线，从而有

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^2=\sum_{i=1}^{3}\mu_i^2=\sum_{i=1}^{3}\nu_i^2=1,$$

因为

$$\frac{(OP_i\cdot\lambda_i)^2}{a^2}+\frac{(OP_i\cdot\mu_i)^2}{b^2}+\frac{(OP_i\cdot\nu_i)^2}{c^2}=1,$$

故

$$\frac{1}{OP_1^2}+\frac{1}{OP_2^2}+\frac{1}{OP_3^2}=\frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^2+\frac{1}{b^2}\sum_{i=1}^{3}\mu_i^2+\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{3}\nu_i^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},$$

所以引理 3 得证。 □

引理 4. 设椭球面 $S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 满足 $a\geqslant b\geqslant c>0$，过椭球中心 O 任作一平面 α 与 S 相交，由引理 1 知交线为椭圆，记此椭圆为 T，设 T 的半长轴和半短轴分别为 m,n，则 $m^2+n^2\leqslant a^2+b^2$。

证明 由于 α 过椭球中心 O，因此 T 的中心也为 O，故此由引理 2 知 $m,n\in[c,a]$。

如果 $m\leqslant b$，则由 $n\leqslant a$ 可知此时结论显然成立，故下面只需证明 $m>b$ 时结论成立即可。

过 O 作与 α 垂直的直线，设此直线与 S 的交点到 O 的距离为 p，则由引理 3 知

$$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},$$

同样由引理 2 有 $p\in[c,a]$，由 $p\geqslant c$ 即得

$$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\geqslant\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2},$$

由此可得

$$m^2+n^2\leqslant m^2+\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{m^2}},$$

而

$$a^2+b^2-\left(m^2+\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{m^2}}\right)=\frac{(a^2+b^2)(a^2-m^2)(m^2-b^2)}{(a^2+b^2)m^2-a^2b^2},$$

故由 $b<m\leqslant a$ 知上式非负，即得 $m^2+n^2\leqslant a^2+b^2$ 成立。

综上所述，引理 4 得证。 □

引理 5. 椭圆型曲线 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ 的两条互相垂直的切线的交点的轨迹为 $x^2+y^2=m^2+n^2$。

引理 5 就是熟知的“蒙日圆”，也有称之为“伴随圆”或“准圆”等的，大家应该都很熟悉，所以具体证明这里就不写了，2014 年高考广东理数 20 题才刚考过。

引理 6. 椭圆型曲线 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ 上有两点 P_1,P_2，记 $P_1P_2=2r$，P_1P_2 的中点为 M，O 为坐标原点，则有 $OM+r\leqslant\sqrt{m^2+n^2}$。

这里我将用两种方法来证明引理 6。

证法一 以 P_1P_2 为直径作圆 M，OM 的延长线交圆 M 于 K，则 $OM+r=OK$，作椭圆的两条切线，使之分别平行于 KP_1,KP_2，如图 1 所示。

由于 $KP_1\perp KP_2$，所以两切线垂直，由引理 5 知两切线的交点 J 必在圆 $x^2+y^2=m^2+n^2$ 上。

由于两切线必在 $\triangle KP_1P_2$ 外或与 KP_1, KP_2 重合，必得 $OK\leqslant OJ$，又因为 $OJ=\sqrt{m^2+n^2}$，所以 $OM+r\leqslant\sqrt{m^2+n^2}$，引理 6 得证。 □

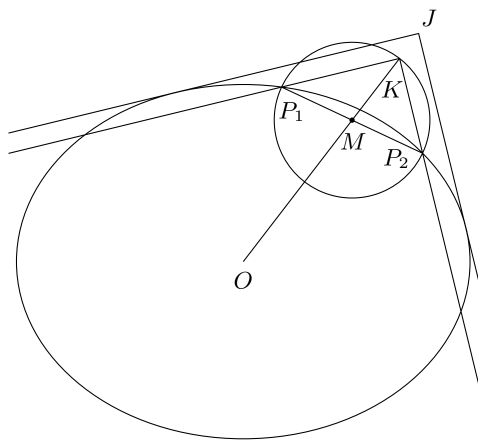


图 1

证法二 设 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$，则 $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，于是

$$OM+r=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}+\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

由

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)^2&=m^2\left(\left(1+\frac{x_1x_2}{m^2}\right)^2-\left(1-\frac{x_1^2}{m^2}\right)\left(1-\frac{x_2^2}{m^2}\right)\right)\\&=m^2\left(\left(1+\frac{x_1x_2}{m^2}\right)^2-\left(\frac{y_1y_2}{n^2}\right)^2\right)\\&=m^2\left(1+\frac{x_1x_2}{m^2}+\frac{y_1y_2}{n^2}\right)\left(1+\frac{x_1x_2}{m^2}-\frac{y_1y_2}{n^2}\right),\end{aligned}$$

同理可得

$$(y_1+y_2)^2=n^2\left(1+\frac{x_1x_2}{m^2}+\frac{y_1y_2}{n^2}\right)\left(1-\frac{x_1x_2}{m^2}+\frac{y_1y_2}{n^2}\right),$$

所以

$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2=\left(1+\frac{x_1x_2}{m^2}+\frac{y_1y_2}{n^2}\right)\left(m^2\left(1+\frac{x_1x_2}{m^2}-\frac{y_1y_2}{n^2}\right)+n^2\left(1-\frac{x_1x_2}{m^2}+\frac{y_1y_2}{n^2}\right)\right),$$

同理可得

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=\left(1-\frac{x_1x_2}{m^2}-\frac{y_1y_2}{n^2}\right)\left(m^2\left(1-\frac{x_1x_2}{m^2}+\frac{y_1y_2}{n^2}\right)+n^2\left(1+\frac{x_1x_2}{m^2}-\frac{y_1y_2}{n^2}\right)\right),$$

易证以上各式右边括号内的式子均为非负，所以由柯西不等式得

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}+\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right)^2\\\leqslant&\left(1+\frac{x_1x_2}{m^2}+\frac{y_1y_2}{n^2}+1-\frac{x_1x_2}{m^2}-\frac{y_1y_2}{n^2}\right)\\&\times\left(m^2\left(1+\frac{x_1x_2}{m^2}-\frac{y_1y_2}{n^2}\right)+n^2\left(1-\frac{x_1x_2}{m^2}+\frac{y_1y_2}{n^2}\right)+m^2\left(1-\frac{x_1x_2}{m^2}+\frac{y_1y_2}{n^2}\right)+n^2\left(1+\frac{x_1x_2}{m^2}-\frac{y_1y_2}{n^2}\right)\right)\\=&4(m^2+n^2),\end{aligned}$$

故

$$OM+r=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}+\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\leqslant\sqrt{m^2+n^2},$$

所以引理 6 得证。 □

准备工作做好了，下面开始证明式 (1)。

证明 依题意知 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为椭球面 $S:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$（$a>b>c>0$）上的两点，设 P_1P_2 的中点为 M，则 $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2},\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$，于是由

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2+\left(z-\frac{z_1+z_2}{2}\right)^2=\frac{1}{4}[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]$$

所决定的动点 $Q(x,y,z)$ 的轨迹是以 M 为球心，P_1P_2 为直径的球面，设此球的半径为 r，O 为原点，则

$$x^2+y^2+z^2=OQ^2\leqslant(OM+r)^2。$$

现在，过 O, P_1, P_2 三点作一平面 α，则由引理 4 知 α 与 S 的交线为椭圆 T，设 T 的半长轴和半短轴分别为 m, n，则 $m^2+n^2\leqslant a^2+b^2$。

又因为 P_1, P_2 在 T 上，$P_1P_2=2r$，因此，由引理 6 知 $OM+r\leqslant\sqrt{m^2+n^2}$。

综上所述，即有

$$x^2+y^2+z^2\leqslant(OM+r)^2\leqslant m^2+n^2\leqslant a^2+b^2，$$

所以式 (1) 获证。 □

参考文献

[1] 邵剑波, 吴善和. 有奖解题擂台 (63)[J]. 中学数学教学, 2003(5):43

2.3 对一道 IMO 试题的再探讨——李剑峰、薛华荣

题目 （第 29 届 IMO 第 6 题）已知正整数 a, b 满足 $(ab+1) \mid (a^2+b^2)$，求证：$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ 是完全平方数。

该题在当时引起一片讨论声，原因在于该题拦倒了主试委员会成员和一些数论专家。丁兴春老师在文 [1] 中提出并解决了更难的问题：求满足 $(ab+1) \mid (a^2+b^2)$ 的所有正整数 a, b 的解。

文 [1] 的解答精巧简洁，然而笔者在取值试验时却发现了一些反例，本文将对原解法作修正，先将文 [1] 解答摘录（部分省略或改动）：

（1）若 $a=b$，则 $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=\dfrac{2a^2}{a^2+1}=2-\dfrac{2}{a^2+1}$ 为正整数，所以 $a^2+1=2$，$a=b=1$；

（2）若 $a \neq b$，由对称性不妨设 $a>b \geqslant 1$，$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=t \in \mathbb{N}^+$，即 $a^2-tba+b^2-t=0$，则 a 是方程 $x^2-tbx+b^2-t=0$ 的一个正整数根。

（I）若 $b^2<t$，则 $\Delta=(tb)^2-4(b^2-t)>(tb)^2$；$\Delta-(tb+1)^2=t(4-2b)-4b^2-1$。

当 $b \geqslant 2$ 时，$\Delta-(tb+1)^2<0$，由 $(tb)^2<\Delta<(tb+1)^2$ 可知 Δ 不是完全平方数，从而方程 $x^2-tbx+b^2-t=0$ 无正整数根，而这与 a 是该方程的一个正整数根矛盾；

当 $b=1$ 时，则 $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=\dfrac{a^2+1}{a+1}$，不难得出 $a-1<\dfrac{a^2+1}{a+1}<a$ 恒成立，即 $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ 不是整数与题设矛盾；

（II）若 $b^2>t$，设方程 $x^2-tbx+b^2-t=0$ 的另一个根为 x_0，则 $x_0=tb-a=\dfrac{b^2-t}{a}$ 为正整数，且 $x_0<a$，于是 $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=\dfrac{x_0^2+b^2}{x_0b+1}=t$。

令 $f(x)=\dfrac{x^2+b^2}{bx+1}$（$x>0$），则 $f(a)=f(x_0)$（$0<x_0<a$）。…………………………………①

仿照上述过程，对 $\dfrac{x_0^2+b^2}{x_0b+1}=t$ 为正整数而言，存在正整数 x_1，使得 $f(x_0)=f(x_1)$（$0<x_1<x_0$）。

因此有 $f(a)=f(x_0)=f(x_1)$（$0<x_1<x_0<a$），研究函数 $f(x)=\dfrac{x^2+b^2}{bx+1}$（$x>0$）的单调性（求导等过程省略）有：$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{-1+\sqrt{1+b^4}}{b}\right)$ 内是减函数，在 $\left(\dfrac{-1+\sqrt{1+b^4}}{b},+\infty\right)$ 上是增函数，因此至多存在两个不同的正实数 m, n 满足 $f(m)=f(n)$，而这又与 $f(a)=f(x_0)=f(x_1)$（$0<x_1<x_0<a$）相矛盾。

综上可知：只能有 $b^2=t$，从而 $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=b^2$，化简得 $a=b^3$。

当 $a=b=1$ 时也满足上式，并结合对称性可知：满足 $(ab+1) \mid (a^2+b^2)$ 的所有正整数解为 $(a,b)=(k^3,k)$ 或 (k,k^3)，其中 k 为正整数。

笔者在取值试验中发现有如下反例：

$(a,b)=(30,8)$ 时，$x_0=2$，$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=4$；$(a,b)=(112,30)$ 时，$x_0=8$，$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=4$。

经分析发现问题出在研究 $\dfrac{x_0^2+b^2}{x_0b+1}=t$ 时（在前文中加着重号部分），如果想仿照上述过程，必须要满足 $x_0>b$，然而 $x_0>b$ 却并非事实。

下面对文 [1] 解法作修正，修改与补充部分接标注 ①。

若 $x_0>b$，则仿照上述过程，对 $\dfrac{x_0^2+b^2}{x_0b+1}=t$ 为正整数而言，存在正整数 x_1，使得 $f(x_0)=f(x_1)$（$0<x_1<x_0$）。

因此有 $f(a)=f(x_0)=f(x_1)$（$0<x_1<x_0<a$），研究函数 $f(x)=\dfrac{x^2+b^2}{bx+1}$（$x>0$）的单调性（求导等过

程省略）有：$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{-1+\sqrt{1+b^4}}{b}\right)$ 内是减函数，在 $\left(\dfrac{-1+\sqrt{1+b^4}}{b},+\infty\right)$ 上是增函数，因此至多存在两个不同的正实数 m, n 满足 $f(m)=f(n)$，而这又与 $f(a)=f(x_0)=f(x_1)$（$0<x_1<x_0<a$）相矛盾；

若 $x_0=b$，则 $\dfrac{x_0^2+b^2}{x_0b+1}=\dfrac{2b^2}{b^2+1}$，仿照（1）得 $b=1$ 与 $b^2>t$ 矛盾；

从而必有 $0<x_0<b<a$，其中 $x_0=tb-a$。

作置换 $(a,b,x_0)\to(b,x_0,x_1)$，其中 $x_1=tx_0-b$，则 $\dfrac{b^2+x_0^2}{bx_0+1}=\dfrac{x_1^2+x_0^2}{x_1x_0+1}=t$，$x_1<x_0<b$；

作置换 $(b,x_0,x_1)\to(x_0,x_1,x_2)$，其中 $x_2=tx_1-x_0$，则 $\dfrac{x_0^2+x_1^2}{x_0x_1+1}=\dfrac{x_2^2+x_1^2}{x_2x_1+1}=t$，$x_2<x_1<x_0$；

反复作置换，得到 $\cdots<x_i<\cdots<x_1<x_0<b<a$，其中 x_i 均为正整数，由最小数原理可知置换次数有限，记最后一次置换 $(x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1})\to(x_{n-2},x_{n-1},x_n)$，其中 $x_n=tx_{n-1}-x_{n-2}$，则 $\dfrac{x_n^2+x_{n-1}^2}{x_nx_{n-1}+1}=t$，即满足 $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=t$ 的最小正整数解 $(a,b)=(x_{n-1},x_n)$。

下面证明 $x_n^2=t$，由 $\dfrac{x_n^2+x_{n-1}^2}{x_nx_{n-1}+1}=t$，则 x_{n-1} 是方程 $x^2-tx_nx+x_n^2-t=0$ 的一个正整数根。

（i）若 $x_n^2<t$，则 $\Delta'=(tx_n)^2-4(x_n^2-t)>(tx_n)^2$；$\Delta'-(tx_n+1)^2=t(4-2x_n)-4x_n^2-1$。

当 $x_n\geqslant 2$ 时，$\Delta'-(tx_n+1)^2<0$，由 $(tx_n)^2<\Delta'<(tx_n+1)^2$ 可知 Δ' 不是完全平方数，从而方程 $x^2-tx_nx+x_n^2-t=0$ 无正整数根，而这与 x_{n-1} 是该方程的一个正整数根矛盾；

当 $x_n=1$ 时，则 $\dfrac{x_n^2+x_{n-1}^2}{x_nx_{n-1}+1}=\dfrac{x_{n-1}^2+1}{x_{n-1}+1}$，不难得出 $x_{n-1}-1<\dfrac{x_{n-1}^2+1}{x_{n-1}+1}<x_{n-1}$，即 $\dfrac{x_n^2+x_{n-1}^2}{x_nx_{n-1}+1}$ 不是整数，与题意相矛盾；

（ii）若 $x_n^2>t$，设方程 $x^2-tx_nx+x_n^2-t=0$ 的另一个根为 x'，则 $x'=tx_n-x_{n-1}=\dfrac{x_n^2-t}{x_{n-1}}$ 为正整数，且有 $x'<x_{n-1}$，于是 $\dfrac{x_n^2+x_{n-1}^2}{x_nx_{n-1}+1}=\dfrac{x_n^2+x'^2}{x_nx'+1}=t$。

也就是说 $(a,b)=(x_n,x')$ 是满足 $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=t$ 的一组正整数解，而这与满足 $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=t$ 的最小正整数解为 $(a,b)=(x_{n-1},x_n)$ 相矛盾。

综合（i）（ii），必定有 $x_n^2=t$。

由 $\dfrac{x_n^2+x_{n-1}^2}{x_nx_{n-1}+1}=x_n^2$ 得 $x_{n-1}=x_n^3$，所以满足 $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=t$ 的最小正整数解 $(a,b)=(x_{n-1},x_n)=(t^{\frac{3}{2}},t^{\frac{1}{2}})$，或 $(a,b)=(t^{\frac{1}{2}},t^{\frac{3}{2}})$（由对称性可得）。

换种表述方式：$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=k^2$ 的最小正整数解为 $(a,b)=(k^3,k)$，或 $(a,b)=(k,k^3)$。

事实上，上述证明已经给出了求满足 $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=k^2$ 的所有正整数解(a,b) 的一种方法：

当 $a>b$ 时，反复作置换：$(a,b,t)\to(b,bt-a,t)$，如 $(k,k^3,k^2)\to(k^3,k^5-k,k^2)\to(k^5-k,k^7-2k^3,k^2)\to(k^7-2k^3,k^9-3k^5+k,k^2)\to\cdots$，类似地，当 $a<b$ 时反复作置换：$(a,b,t)\to(a,at-b,t)$。

最后给出一个猜想：已知正整数 a, b 满足 $(a^2b^2+1)\mid(a^3+b^3)$，则 $\dfrac{a^3+b^3}{a^2b^2+1}$ 是立方数。

参考文献

[1] 丁兴春. 对一道数论问题的再思考 [J]. 数学通讯, 2011（10）（下半月）

2.4 褚小光的三个不等式猜想的证明——朱世杰

记 $S_n(m)=\sum\limits_{p=1}^{n}p^m$，2008 年褚小光提出如下三个不等式猜想：当 m 为正整数时，证明或否定：

$$[S_n(m)]^2\geqslant\frac{m(m+2)}{(m+1)^2}S_n(m-1)S_n(m+1)\text{；}\tag{1}$$

$$S_n(m+1)<\frac{(n+1)(m+1)}{m+2}S_n(m)\text{；}\tag{2}$$

$$S_n(m)<\frac{n(n+1)^m}{m+2}\text{。}\tag{3}$$

其中不等式 (3) 错误，吴炜超将其修正为：

$$S_n(m)\leqslant\frac{n(n+1)^m}{m+1}\text{。}\tag{4}$$

本文将对不等式 (1)、(2)、(4) 给出证明。

不等式 (4) 的证明 当 $n=1$ 时，此时不等式为 $1\leqslant\dfrac{2^m}{m+1}$，即 $(1+1)^m\geqslant 1+m$，显然成立。

假设 $n=k$ 时，有 $S_k(m)<\dfrac{k(k+1)^m}{m+1}$ 成立。

则当 $n=k+1$ 时，需要证明 $S_{k+1}(m)<\dfrac{(k+1)(k+2)^m}{m+1}$。

由 $S_{k+1}(m)=S_k(m)+(k+1)^m$ 及归纳假设，只需要证明

$$\frac{k(k+1)^m}{m+1}+(k+1)^m\leqslant\frac{(k+1)(k+2)^m}{m+1},$$

即

$$\frac{k}{m+1}+1\leqslant\frac{k+1}{m+1}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^m,$$

由伯努利不等式有 $\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)^m\geqslant 1+\dfrac{m}{k+1}$，可得上式成立，即当 $n=k+1$ 时，不等式 (4) 也成立。

由数学归纳法知不等式 (4) 成立。 □

不等式 (2) 的证明 当 $n=1$ 时，此时不等式为 $1\leqslant\dfrac{2m+2}{m+2}$，显然成立。

假设 $n=k$ 时，有 $S_k(m+1)<\dfrac{(k+1)(m+1)}{m+2}S_k(m)$ 成立。

则当 $n=k+1$ 时，需要证明 $S_{k+1}(m+1)<\dfrac{(k+2)(m+1)}{m+2}S_{k+1}(m)$。

由归纳假设有

$$S_{k+1}(m+1)=S_k(m+1)+(k+1)^{m+1}<\frac{(k+1)(m+1)}{m+2}S_k(m)+(k+1)^{m+1},$$

只需要证明

$$\begin{aligned}&\frac{(k+1)(m+1)}{m+2}S_k(m)+(k+1)^{m+1}\leqslant\frac{(k+2)(m+1)}{m+2}S_k(m)+\frac{(k+2)(m+1)}{m+2}(k+1)^m\\ \iff\ &(k+1)^{m+1}\leqslant\frac{m+1}{m+2}S_k(m)+\frac{(k+2)(m+1)}{m+2}(k+1)^m\end{aligned}$$

$$\iff (k+1)^{m+1}-\frac{(k+1)(m+1)}{m+2}(k+1)^m\leqslant\frac{m+1}{m+2}S_{k+1}(m)$$

$$\iff (k+1)^{m+1}\leqslant(m+1)S_{k+1}(m)\,, \tag{5}$$

只要证出式 (5)，即由数学归纳法可得出不等式 (2) 成立。

下面证明式 (5)：

当 $k=1$ 时，式 (5) 为 $2^{m+1}\leqslant(m+1)(1+2^m)$，显然成立。

假设 $k=t$ 时，式 (5) 成立，即 $(t+1)^{m+1}\leqslant(m+1)S_{t+1}(m)$ 成立。

则当 $k=t+1$ 时，需要证明 $(t+2)^{m+1}\leqslant(m+1)S_{t+2}(m)$。

由归纳假设，只需要证明

$$(t+2)^{m+1}\leqslant(t+1)^{m+1}+(m+1)(t+2)^m\,,$$

即

$$1\leqslant\left(1-\frac{1}{t+2}\right)^{m+1}+\frac{m+1}{t+2},$$

由伯努利不等式，有 $\left(1-\dfrac{1}{t+2}\right)^{m+1}\geqslant1-\dfrac{m+1}{t+2}$，可得上式成立，即当 $k=t+1$ 时，式 (5) 也成立，所以不等式 (2) 获证。 □

不等式 (1) 的证明 不等式 (1) 即

$$\begin{aligned}&(m+1)^2\left(1+2^m+3^m+\cdots+n^m\right)^2\\ \geqslant\;& m(m+2)\left(1+2^{m-1}+3^{m-1}+\cdots+n^{m-1}\right)\left(1+2^{m+1}+3^{m+1}+\cdots+n^{m+1}\right)。\end{aligned}$$

当 $n=1$ 时，上式为 $(m+1)^2\geqslant m(m+2)$，显然成立。

当 $n\geqslant2$ 时，两边展开消去 $m(m+2)\left(1+2^{2m}+3^{2m}+\cdots+n^{2m}\right)+2(m+1)^2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}i^mj^m$ 后，等价于

$$1+2^{2m}+3^{2m}+\cdots+n^{2m}\geqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(m(m+2)\left(\frac{i}{j}+\frac{j}{i}-2\right)-2\right)i^mj^m。$$

当 $n=2$ 时，上式化简为 $1+2^{2m}\geqslant\left(\dfrac{1}{2}m^2+m-2\right)2^m$，易证 $2^m\geqslant\dfrac{1}{2}m^2+m-2$，所以此时不等式 (1) 成立。

假设 $n=k$（k 为不小于 2 的正整数）时，不等式 (1) 成立，也即

$$1+2^{2m}+3^{2m}+\cdots+k^{2m}\geqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}\left(m(m+2)\left(\frac{i}{j}+\frac{j}{i}-2\right)-2\right)i^mj^m,$$

那么 $n=k+1$ 时，要证不等式 (1) 成立，需要证明

$$1+2^{2m}+3^{2m}+\cdots+(k+1)^{2m}\geqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k+1}\left(m(m+2)\left(\frac{i}{j}+\frac{j}{i}-2\right)-2\right)i^mj^m,$$

由归纳假设，只需要证明

$$(k+1)^{2m}\geqslant\sum_{i=1}^{k}\left(m(m+2)\left(\frac{i}{k+1}+\frac{k+1}{i}-2\right)-2\right)i^m(k+1)^m,$$

即

$$(k+1)^m \geqslant \sum_{i=1}^{k}\left(m\left(m+2\right)\left(\frac{i}{k+1}+\frac{k+1}{i}-2\right)-2\right)i^m, \tag{6}$$

只要证出式 (6)，即由数学归纳法得出不等式 (1) 成立。

下面证明式 (6)：

当 $k+1=2$ 时，式 (6) 为 $2^m \geqslant \frac{1}{2}m^2+m-2$，此为易证。

假设当 $k+1=q$（q 为不小于 2 的正整数）时，式 (6) 成立，即

$$q^m \geqslant \sum_{i=1}^{q-1}\left(m\left(m+2\right)\left(\frac{i}{q}+\frac{q}{i}-2\right)-2\right)i^m,$$

那么当 $k+1=q+1$ 时，需要证明

$$(q+1)^m \geqslant \sum_{i=1}^{q}\left(m\left(m+2\right)\left(\frac{i}{q+1}+\frac{q+1}{i}-2\right)-2\right)i^m,$$

由归纳假设，只需要证明

$$\begin{aligned}
&(q+1)^m-q^m \geqslant \sum_{i=1}^{q}\left(m\left(m+2\right)\left(\frac{i}{q+1}+\frac{q+1}{i}-2\right)-2\right)i^m-\sum_{i=1}^{q-1}\left(m\left(m+2\right)\left(\frac{i}{q}+\frac{q}{i}-2\right)-2\right)i^m\\
\iff\ &(q+1)^m-q^m \geqslant \left(\frac{m\left(m+2\right)}{q\left(q+1\right)}-2\right)q^m+m\left(m+2\right)\sum_{i=1}^{q-1}\left(\frac{i}{q+1}+\frac{q+1}{i}-\frac{i}{q}-\frac{q}{i}\right)i^m\\
\iff\ &(q+1)^m+q^m \geqslant m\left(m+2\right)\frac{q^{m-1}}{q+1}+m\left(m+2\right)\sum_{i=1}^{q-1}\left(\frac{1}{i}-\frac{i}{q\left(q+1\right)}\right)i^m\\
\iff\ &\frac{q\left(q+1\right)^{m+1}+\left(q+1\right)q^{m+1}}{m\left(m+2\right)} \geqslant q^m+\sum_{i=1}^{q-1}\left(\frac{q\left(q+1\right)}{i}-i\right)i^m,
\end{aligned} \tag{7}$$

只要证出式 (7)，即由数学归纳法得出式 (6) 成立。

下面证明式 (7)：

当 $q=2$ 时，式 (7) 为 $2\times 3^{m+1}+3\times 2^{m+1}\geqslant m\left(m+2\right)2^m+5m\left(m+2\right)$。

记 $f\left(m\right)=2\times 3^{m+1}+3\times 2^{m+1}-m\left(m+2\right)2^m-5m\left(m+2\right)$，则 $f\left(1\right)=9, f\left(2\right)=6, f\left(3\right)=15$，当 $m\geqslant 4$ 时，由二项式定理有

$$\begin{aligned}
2\times 3^{m+1}&=18\times\left(2+1\right)^{m-1}\\
&>16\times\left(2^{m-1}+\left(m-1\right)2^{m-2}+\frac{m\left(m-1\right)}{2}2^{m-3}+\frac{m\left(m-1\right)\left(m-2\right)}{6}2^{m-4}\right)\\
&=\left(m^2+3m+4\right)2^m+\frac{m\left(m-1\right)\left(m-2\right)}{6}2^m\\
&\geqslant\left(m^2+3m+4\right)2^m+m2^m,
\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}
f\left(m\right)>0\ &\Longleftarrow\ \left(2m+10\right)2^m\geqslant 5m\left(m+2\right)\\
&\iff\ 4\left(2m+10\right)\left(1+1\right)^{m-2}\geqslant 5m\left(m+2\right)\\
&\Longleftarrow\ 4\left(2m+10\right)\left(1+m-2\right)\geqslant 5m\left(m+2\right)
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow\ 3m^2+22m\geqslant 40,$$

显然成立，即 $q=2$ 时式 (7) 成立。

假设 $q=t$（t 为不小于 2 的正整数）时式 (7) 成立，即

$$\frac{t\left(t+1\right)^{m+1}+\left(t+1\right)t^{m+1}}{m\left(m+2\right)}\geqslant t^m+\sum_{i=1}^{t-1}\left(\frac{t\left(t+1\right)}{i}-i\right)i^m,$$

那么当 $q=t+1$ 时，需要证明

$$\frac{\left(t+1\right)\left(t+2\right)^{m+1}+\left(t+2\right)\left(t+1\right)^{m+1}}{m\left(m+2\right)}\geqslant \left(t+1\right)^m+\sum_{i=1}^{t}\left(\frac{\left(t+1\right)\left(t+2\right)}{i}-i\right)i^m,$$

由归纳假设，只需要证明

$$\frac{(t+1)(t+2)^{m+1}+2(t+1)^{m+1}-(t+1)t^{m+1}}{m\left(m+2\right)}\geqslant (t+1)^m-t^m+\left(\frac{(t+1)(t+2)}{t}-t\right)t^m+\sum_{i=1}^{t-1}2(t+1)i^{m-1},$$

等价于

$$\frac{\left(t+2\right)^{m+1}+2\left(t+1\right)^m-t^{m+1}}{m\left(m+2\right)}\geqslant \left(t+1\right)^{m-1}+2t^{m-1}+2\sum_{i=1}^{t-1}i^{m-1},\tag{8}$$

只要证出式 (8)，即由数学归纳法得出式 (7) 成立。

下面证明式 (8)：

当 $t=2$ 时，式 (8) 为 $\dfrac{4^{m+1}+2\times 3^m-2^{m+1}}{m\left(m+2\right)}\geqslant 3^{m-1}+2^m+2$。

记 $f\left(m\right)=4^{m+1}+2\times 3^m-2^{m+1}-m\left(m+2\right)\left(3^{m-1}+2^m+2\right)$，则 $f\left(1\right)=3, f\left(2\right)=2, f\left(3\right)=9, f\left(4\right)=74, f\left(5\right)=493, f\left(6\right)=2882$，当 $m\geqslant 7$ 时，由二项式定理以及 $4^4>3^5$, $3^6>2^9$，有

$$\begin{aligned}4^{m+1}&=4^4\times\left(3+1\right)^{m-3}\\&>3^5\times\left(3^{m-3}+\left(m-3\right)3^{m-4}+\frac{\left(m-3\right)\left(m-4\right)}{2}3^{m-5}+\frac{\left(m-3\right)\left(m-4\right)\left(m-5\right)}{6}3^{m-6}\right)\\&\geqslant 3^{m+2}+\left(m-3\right)3^{m+1}+\frac{\left(m-3\right)\left(m-4\right)}{2}3^m+\left(m-3\right)3^{m-1}\\&=\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{1}{2}m+15\right)3^{m-1},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}f\left(m\right)&>\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{1}{2}m+15\right)3^{m-1}+2\times 3^m-2^{m+1}-m\left(m+2\right)\left(3^{m-1}+2^m+2\right)\\&=\left(\frac{1}{2}m^2-\frac{5}{2}m+21\right)3^{m-1}-2^{m+1}-m\left(m+2\right)\left(2^m+2\right)\\&>\left(\frac{1}{2}m^2-\frac{5}{2}m+21\right)2^9\times 3^{m-7}-2^{m+1}-m\left(m+2\right)\left(2^m+2\right)\\&\geqslant\left(2m^2-10m+42\right)2^7\times 2^{m-7}-2^{m+1}-m\left(m+2\right)\left(2^m+2\right)\\&=2^m\left(m^2-12m+40\right)-2m\left(m+2\right)>2^{m+2}-2m\left(m+2\right)\\&>8\left(1+m-1+\frac{\left(m-1\right)\left(m-2\right)}{2}\right)-2m\left(m+2\right)\end{aligned}$$

$$= 2(m-2)^2 > 0,$$

即 $t=2$ 时，式 (8) 成立。

假设 $t=k$（k 为不小于 2 的正整数）时式 (8) 成立，那么要证 $t=k+1$ 时式 (8) 成立，只需要证明

$$\frac{(k+3)^{m+1}+2(k+2)^m-(k+1)^{m+1}}{m(m+2)}-\frac{(k+2)^{m+1}+2(k+1)^m-k^{m+1}}{m(m+2)} \geqslant (k+2)^{m-1}+(k+1)^{m-1}$$

$$\iff (k+3)^{m+1}+k^{m+1} \geqslant m(m+2)\left((k+2)^{m-1}+(k+1)^{m-1}\right)+k(k+2)^m+(k+3)(k+1)^m, \tag{9}$$

只要证出式 (9)，即由数学归纳法得出式 (8) 成立。

下面证明式 (9)：

记 $f_m(k)=(k+3)^{m+1}+k^{m+1}-m(m+2)\left((k+2)^{m-1}+(k+1)^{m-1}\right)-k(k+2)^m-(k+3)(k+1)^m$（$k \geqslant 2$），则 $f_1(k)=f_2(k)=0,\ f_3(k)=3$，即当 $m=1,\ 2,\ 3$ 时式 (9) 都成立。

假设 $m=p$（p 为不小于 3 的正整数）时，有 $f_p(k)>0$ 成立。

当 $m=p+1$ 时，以下先证明 $f'_{p+1}(k)>(p+2)f_p(k)$。

$$\begin{aligned}\iff\ & (p+2)(k+3)^{p+1}+(p+2)k^{p+1}-p(p+1)(p+3)\left((k+2)^{p-1}+(k+1)^{p-1}\right)\\ & -(p+1)k(k+2)^p-(k+2)^{p+1}-(k+1)^{p+1}-(p+1)(k+3)(k+1)^p\\ & >(p+2)\left((k+3)^{p+1}+k^{p+1}-p(p+2)\left((k+2)^{p-1}+(k+1)^{p-1}\right)-k(k+2)^p-(k+3)(k+1)^p\right)\\ \iff\ & p(k+2)^{p-1}+p(k+1)^{p-1}+2(k+1)^p>2(k+2)^p\\ \iff\ & p(k+2)^{p-1}+p(k+1)^{p-1}>2(k+2)^p-2(k+1)^p=2\sum_{i=1}^{p}(k+2)^{p-i}(k+1)^{i-1},\end{aligned}$$

而 $(k+2)^{p-1}+(k+1)^{p-1}>(k+2)^{p-i}(k+1)^{i-1}+(k+2)^{i-1}(k+1)^{p-i}$ 对 $i=2,3,\cdots,p-1$ 成立，所以上式成立，所以 $f'_{p+1}(k)>(p+2)f_p(k)>0$，即对于给定的 p，$f_{p+1}(k)$ 为 k 的增函数。

所以，只要证出 $f_{p+1}(2)>0$，便有 $f_{p+1}(k) \geqslant f_{p+1}(2)>0$，即由数学归纳法得出式 (9) 成立。

下面证明 $f_{p+1}(2)>0$，即证

$$f_{p+1}(2)=5^{p+2}+2^{p+2}-(p+1)(p+3)(4^p+3^p)-2\times 4^{p+1}-5\times 3^{p+1}>0,$$

其中 $p \geqslant 3,\ p \in \mathbb{N}^+$。因为 $f_4(2)=56, f_5(2)=631, f_6(2)=5600, f_7(2)=43203$，即当 $p+1=4,5,6,7$ 时 $f_{p+1}(2)>0$ 成立。

假设 $p+1=k$（k 为不小于 7 的正整数）时，$f_{p+1}(2)>0$ 成立，即 $5^{k+1}>k(k+2)\left(4^{k-1}+3^{k-1}\right)+2\times 4^k+5\times 3^k-2^{k+1}$。

则当 $p+1=k+1$ 时，由归纳假设有

$$\begin{aligned}f_{p+1}(2)&=5^{k+2}+2^{k+2}-(k+1)(k+3)\left(4^k+3^k\right)-2\times 4^{k+1}-5\times 3^{k+1}\\ &>5\left(k(k+2)\left(4^{k-1}+3^{k-1}\right)+2\times 4^k+5\times 3^k-2^{k+1}\right)+2^{k+2}-(k+1)(k+3)\left(4^k+3^k\right)\\ &\quad -2\times 4^{k+1}-5\times 3^{k+1}\\ &=\left(2k^2-2k+21\right)3^{k-1}+\left(k^2-6k-4\right)4^{k-1}-3\times 2^{k+1},\end{aligned}$$

只需要证明

$$\left(2k^2-2k+21\right)3^{k-1}+\left(k^2-6k-4\right)4^{k-1}>3\times 2^{k+1},$$

由 $k \geqslant 7$，上式显然成立，所以由数学归纳法知 $f_{p+1}(2)>0$ 成立。

至此，不等式 (1) 的证明全部完成。 □

练习题：

1. $\dfrac{(2n+1)(m+2)}{2n(n+1)(m+1)}S_n(m+1) \leqslant S_n(m) \leqslant \dfrac{m+2}{n(m+1)}S_n(m+1)$，其中 $2 \leqslant m, 1 \leqslant n, m, n \in \mathbb{N}$。
2. $n^m \geqslant m(m+2)\dfrac{(n-1)^{m-1}}{n} + (n-1)^m$，其中 $m \geqslant 2, n \geqslant 3, m, n \in \mathbb{N}$。
3. $\dfrac{(2k+1)(2k+2-m)}{4(m+1)}(k+1)^{m-1} \leqslant S_k(m)$。

参考文献

[1] 匡继昌. 常用不等式（第四版）[M]. 山东科学技术出版社, 2010:104

朝花夕拾

3.1 【封面故事】Poncelet 闭合定理——何万程

如图 1，作一个三角形的外接圆和内切圆，则从外接圆的任意一点引内切圆的切线，这两条切线与外接圆相交于另外两点，这两点所在的直线仍然是内切圆的切线。

定理 1 (Poncelet 闭合定理)**.** 两条圆锥曲线 A、B 若从 A 的某点为起点作 B 的切线交 A 于另一点，如此重复，第 n 次作的切线过起点，那么从 A 的任意一点为起点如上述步骤作 n 次切线后也必定经过起点。

该定理是法国数学家 Jean-Victor Poncelet（1788–1867）发现的，法国人骄傲地称之为“le grand théorème de Poncelet”，意思就是 Poncelet 大定理。由于 Poncelet 闭合定理的证明比较困难，这里就不写证明了。

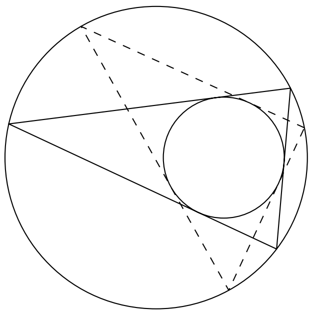


图 1

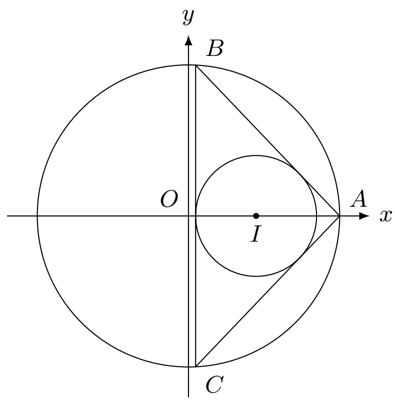


图 2

根据 Poncelet 闭合定理，我们只要找一些特殊位置就可以比较容易得到满足条件圆锥曲线的一些量的关系。

例如，如图 2，三角形的外接圆 O 的半径是 R，内切圆 I 的半径是 r，$OI = d$，我们以 OI 为 x 轴，点 O 为原点建立坐标系，则 I 的坐标是 $(d, 0)$，取点 $A(R, 0)$，过点 A 作 $\odot I$ 的切线，分别交 $\odot O$ 于点 B、C，则直线 AB 的方程是

$$y = -\frac{r}{\sqrt{(R-d)^2 - r^2}}(x - R),$$

结合 $\odot O$ 的方程

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

由此求得点 B 的 x 坐标是

$$x_B = \frac{2r^2 - (R-d)^2}{(R-d)^2}R,$$

所以

$$d - r = \frac{2r^2 - (R-d)^2}{(R-d)^2}R,$$

整理得

$$(d - R - r)\left(d^2 - R^2 + 2Rr\right) = 0,$$

显然 $d - R - r \neq 0$，所以得

$$d^2 = R^2 - 2Rr。$$

类似上面的方法，我们可以得到如下结论：

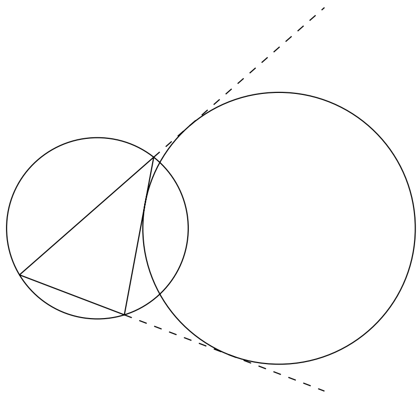


图 3

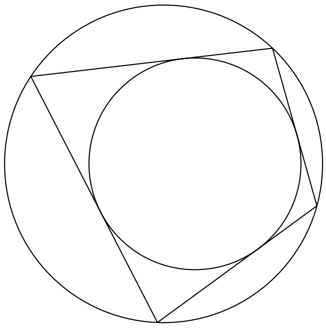


图 4

如图 3，三角形的外接圆的半径是 R，旁切圆的半径是 r，两圆圆心距是 d，则 $d^2=R^2+2Rr$。

如图 4，四边形的外接圆的半径是 R，内切圆的半径是 r，两圆圆心距是 d，则 $\dfrac{1}{(R+d)^2}+\dfrac{1}{(R-d)^2}=\dfrac{1}{r^2}$。

如图 5，三角形内接于圆 $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$ 且外切于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则

$$r=\sqrt{a^2+b^2+u^2+v^2+2\sqrt{a^2b^2+a^2u^2+b^2v^2}};$$

如图 6，三角形内接于圆 $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$ 且旁切于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则

$$r=\sqrt{a^2+b^2+u^2+v^2-2\sqrt{a^2b^2+a^2u^2+b^2v^2}}。$$

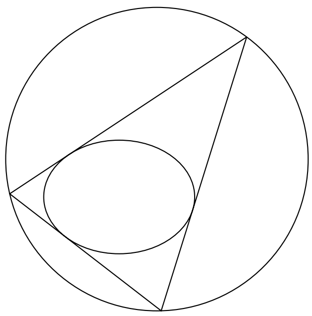


图 5

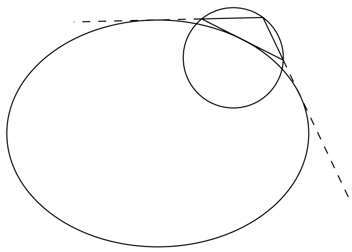


图 6

如图 7，三角形内接于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b$）且外切于圆 $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$，则

$$r=\frac{\sqrt{S-2ab\sqrt{T}}}{a^2-b^2};$$

如图 8，三角形内接于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b$）且旁切于圆 $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$，则

$$r=\frac{\sqrt{S-2ab\sqrt{T}}}{a^2-b^2}。$$

其中

$$S=a^2b^2\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2-b^2\right)\left(a^2v^2-b^2u^2\right)，T=\left(a^4-\left(a^2-b^2\right)u^2\right)\left(b^4-\left(b^2-a^2\right)v^2\right)。$$

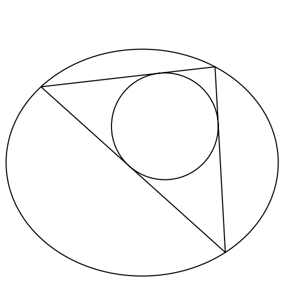


图 7

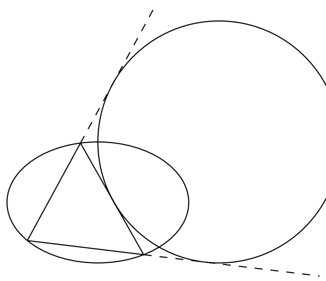


图 8

如图 9，三角形内接于圆 $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$ 且切于双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则

$$r=\sqrt{a^2-b^2+u^2+v^2\pm 2\sqrt{-a^2b^2+a^2u^2-b^2v^2}}。$$

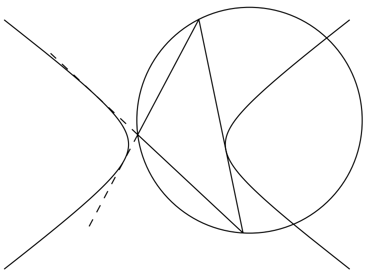


图 9

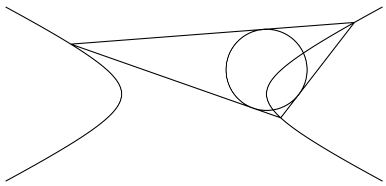


图 10

如图 10，三角形内接于双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 且切于圆 $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$，则

$$r=\frac{\sqrt{S\pm 2ab\sqrt{T}}}{a^2-b^2},$$

其中

$$S=-a^2b^2\left(a^2-b^2\right)+\left(a^2+b^2\right)\left(a^2v^2+b^2u^2\right)，T=\left(-a^4+\left(a^2+b^2\right)u^2\right)\left(b^4+\left(b^2+a^2\right)v^2\right)。$$

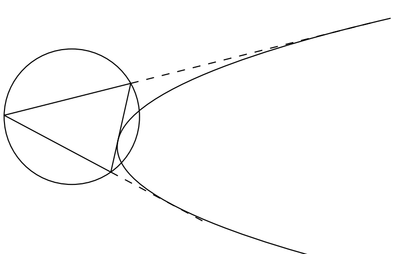


图 11

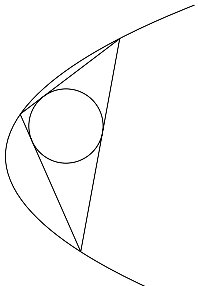


图 12

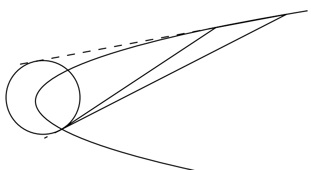


图 13

如图 11，三角形内接于圆 $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$ 且切于抛物线 $y^2=2px$，则

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{(p-2u)^2+4v^2}。$$

如图 12，三角形内接于抛物线 $y^2=2px$ 且外切于圆 $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$，则

$$r=\sqrt{2p\left(p+u\right)+v^2-2\sqrt{p\left(p+2u\right)\left(p^2+v^2\right)}}。$$

如图 13，三角形内接于抛物线 $y^2=2px$ 且旁切于圆 $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$，则

$$r=\sqrt{2p\left(p+u\right)+v^2+2\sqrt{p\left(p+2u\right)\left(p^2+v^2\right)}}。$$

3.2 瑞典数学家七杰——李明

瑞典是北欧面积最大的国家，与我国黑龙江省大小相当，但人口仅为黑龙江省的四分之一，约 900 多万。瑞典东临芬兰，西临挪威，南与欧洲大陆的德国和波兰隔海相望，经济发达，高福利，是国际公认的发达国家之一。

要说瑞典最著名的人物，莫过于硝酸炸药的发明人——化学家诺贝尔（Nobel, 1833–1896）。关于“诺贝尔奖里未设数学奖是因为诺贝尔的情敌是他的同胞、数学家米塔—列夫勒，一旦设数学奖，此人极有可能会获奖”的传闻始终被人们津津乐道，或许是大家喜欢挖名人墙角的心理作怪吧！事实上，真正的原因是诺贝尔时代的化学研究仅使用了少量的初等数学，而高等数学在化学中发挥重要作用已经是诺贝尔去世以后的事情了。

诺贝尔如此轻视数学，笔者便不禁好奇于其祖国瑞典的数学水平。系统介绍瑞典数学的书籍资料不易找到，但介绍该国著名数学家的资料还是能够搜集到的。笔者通过查阅相关文献，遴选出七位最具代表性的瑞典数学家。通过这七位“大侠”的生平业绩，瑞典的数学发展，我们至少也能窥见一斑吧！

1. 米塔—列夫勒（Mittag-Leffler, 1846–1927）——瑞典数学奠基人

生卒于首都斯德哥尔摩，长期在斯德哥尔摩大学任职，是德国著名数学家、柏林大学教授魏尔斯特拉斯的学生。

米塔在数学分析和复变函数方面有许多经典性工作，著述达 119 种，其中有著名的米塔—列夫勒定理和米塔—列夫勒矩阵。米塔还是一位优秀的教育家和杰出的组织者。经他苦心经营，使瑞典当时拥有世界上最好的数学研究资料和图书馆。1882 年，他又创刊出版了一流的数学杂志《数学学报》，培养和聘请了弗雷德霍姆、富拉格门、冯·科克等著名学者，使瑞典成为当时世界数学研究中心之一。

2. 弗雷德霍姆（Fredholm, 1866–1927）——积分方程美名扬

生卒于斯德哥尔摩，1885 年就学于技术学院，1888 年在斯德哥尔摩大学师从数学家米塔—列夫勒。1906 年任该校教授，后成为瑞典科学院和法国科学院院士和通讯院士。

弗雷德霍姆主要从事方程论研究。他给出了一般常系数椭圆型偏微分方程的基本解，并在积分方程的研究以解决“弗雷德霍姆方程”受到关注，因此获得“巴黎科学院奖”。

3. 冯·科克（Von Koch, 1870–1924）——雪花曲线分数维

1887 年在斯德哥尔摩大学师从数学家米塔—列夫勒，1888 年转学至乌普萨拉大学，1992 年获该校哲学博士学位。1905 年担任瑞典皇家工学院数学教授，1911 年成为斯德哥尔摩大学的数学教授。

冯·科克写过多篇数论论文。他于 1901 年证明的一个定理揭示了黎曼猜想等价于素数定理的一个条件更强的形式。在他 1904 年的论文“关于一个可由基本几何方法构造出的无切线的连续曲线”中，他描述了雪花曲线的构造方法，该曲线是最早的分形曲线之一，后人称之为“科克雪花”。

4. 卡莱曼（Carleman, 1892–1949）——执掌米塔数学所

生于乌普萨拉，1916 年获博士学位。1923 年任隆德大学教授，次年任斯德哥尔摩大学教授。1927 年，米塔—列夫勒去世，卡莱曼继任数学研究所领导人，并任《数学学报》编辑。

卡莱曼的主要贡献在函数论、积分方程论和谱理论方面。在这些理论中，还以他的名字命名了若干定理、法则、不等式、积分核和正交多项式等。在解析函数论中，他首先给出了 C(Mn) 是拟解析函数的充要条件，并建立了著名的当儒瓦——卡莱曼定理。他还发表了大量论著，如《拟解析函数》（1926）等。最后介绍一下奇妙的卡莱曼不等式：设 $a_k > 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n$，则 $a_1 + \sqrt{a_1a_2} + \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \cdots + \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} < e(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$。该不等式还有无限和形式和积分形式，至今仍然是一些解析不等式研究者热衷的研究课题之一。

5. 克拉默（Cramer, 1893–1985）——瑞典统计之泰斗

生卒于斯德哥尔摩。1912 年入斯德哥尔摩大学学习，1917 年获博士学位，并留校任教。1929 年任该校保险统计数学与数理统计学院首位院长，1950 年当选为该校校长，1958–1961 年任全瑞典大学系统的主管官员。他还曾任瑞典保险统计学会主席（1935–1964）、瑞典和丹麦等多国科学院院士。1984 年，他当选为美国全国科学院外籍院士。在 1940–1963 年，他连任《斯堪的纳维亚保险统计杂志》主编。

克拉默早期研究解析数论，1925 年转向概率论，并对保险风险问题进行了深入研究。1937 年，他得到了有关“大偏差问题”的渐进展开基本定理。1942 年，他证明了平稳随机过程谱表示的一个基本定理。他和印度统计学家拉奥在 1945 和 1946 年给出的克拉默——拉奥不等式已成为寻求“一致最小方差无偏估计”的重要工具之一。他在 1945 年出版的《统计数学方法》一书中，以严格的概率论基础，阐述了统计推断方法。该书曾被各国广泛用作教科书，1960 年中国也出版了中译本。他曾获英国皇家统计学会金质盖伊奖章和罗马林琴科学院保险统计学数学奖。另外，他还著有《概率论基础》（1955）和《一类随机过程的结构与统计问题》（1971）等专著。

6. 卡尔森（Carleson, 1928– ）——两度报告三获奖

生于斯德哥尔摩，1950 年获乌普萨拉大学博士学位，1950–1951 年在哈佛大学做博士后研究，后在乌普萨拉大学、斯德哥尔摩大学任教授，1986 年兼任美国加州大学洛杉矶分校教授。1956–1979 年任《数学学报》主编，1968–1984 年任米塔—列夫勒数学研究所所长。1978–1982 年，任国际数学联盟主席。他是瑞典科学院院士和美国艺术与科学学院、俄罗斯科学院、英国皇家学会、法国、丹麦、挪威、芬兰、匈牙利等科学院的外籍院士。他还于 1962 和 1966 年两次应邀在国际数学家大会上作报告。

卡尔森在傅立叶分析、复分析、拟共形映射和动力系统等方面都做出了重要贡献。1958–1962 年解决了科罗纳猜想，由此引入的卡尔森测度已成为傅立叶分析和复分析的基本工具。1966 年，卡尔森借助哈代——李特尔伍德极大函数和考尔德伦定理，极其精妙地证实了提出已达半个多世纪的鲁津猜想（即：区间 $[0,2\pi]$ 上平方可积函数的傅里叶级数，在 $[0,2\pi]$ 上几乎处处收敛），轰动了数学界。1974 年，他证实了 $\mathbb{R}^3$ 上的拟共形自映射可推广到 $\mathbb{R}^4$。20 世纪 80 年代，他和贝尼迪克斯合作证明了亨诺映射：$(x,y)\to(1+y-ax^2,bx)$ 对非空参数集均存在“奇异吸引子”，从而打开了系统研究此类动力系统的大门。由于卡尔森的杰出学术贡献，他于 1984 年获美国数学会斯蒂尔奖，1992 年获沃尔夫数学奖，2006 年获阿贝尔奖。

7. 赫尔曼德尔（Hormander, 1931–2012）——功成名就偏微分

生于布莱金厄。1955 年获隆德大学博士学位。1957–1964 年，任斯德哥尔摩大学数学教授，1964–1968 年任普林斯顿高等研究院教授，1968 年任隆德大学教授直至 1996 年退休。1987–1990 年，他曾任国际数学联盟副主席。他还是美国全国科学院、美国艺术与科学学院瑞典皇家科学院、丹麦科学院等科研机构的院士。

赫尔曼德尔是米塔—列夫勒所奠定的瑞典分析学派的优秀继承者，他的工作成果主要在现代线性偏微分方程理论方面。他是伪微分算子和傅立叶积分算子的奠基人之一。1959 年，他在偏微分方程一般理论上取得了突破性成果。1962 年，第 14 届国际数学家大会在瑞典召开，赫尔曼德尔获得了被誉为“数学界诺贝尔奖”的菲尔兹奖。

1968–1970 年，赫尔曼德尔在拉克斯等人工作的基础上系统地建立了傅立叶积分算子局部及整体理论。他把傅立叶积分算子定义为一个更广泛的伪微分算子类，并把其应用到了椭圆型算子谱函数，导出了一个极精确的渐进公式。他的四卷本《线性偏微分算子分析》（1983–1985）被认为是线性偏微分算子的经典文献。此外，他还著有《多变量复分析引论》（1966）等专著。1988 年，赫尔曼德尔还获得了获沃尔夫数学奖。

参考文献

[1] 《数学辞海》编辑委员会. 数学辞海（第六卷）[M]. 山西：山西教育出版社, 2002.8

[2] 张奠宙. 20 世纪数学经纬 [M]. 上海：华东师范大学出版社, 2002.3

[3] 李心灿. 当代数学大师——沃尔夫数学奖得主及其建树与见解（第 3 版）[M]. 北京：北京航空航天大学出版社, 2005.10
[4] 匡继昌. 常用不等式（第四版）[M]. 济南：山东科学技术出版社, 2010.8
[5] 维基百科——瑞典数学家 [W]. http://zh.wikipedia.org/wiki/Category:瑞典数学家